Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional

Ficha 1

1 Munkres 10.3. Os conjuntos $\{1,2\} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \{1,2\}$ são ambos bem ordenados pela ordem lexicográfica. Têm o mesmo tipo de ordem [1]?

2 Munkres 10.6. Seja S_Ω o menor conjunto bem ordenado não contável.

(a) Mostre que S_Ω não tem máximo.

(b) Mostre que se $\alpha \in S_\Omega$, o conjunto $\{x \in S_\Omega : \alpha < x\}$ é não contável.

(c) Se X é um conjunto bem ordenado, diz-se que $\alpha \in X$ *tem um predecessor imediato* (ou que α é um *sucessor*) se existe $\beta \in X$ tal que $\beta < \alpha$ e o conjunto $\{x \in X : \beta < x < \alpha\}$ é vazio. Seja

$$X_0 = \{x \in S_\Omega : x \text{ não tem predecessor imediato } \}.$$

Mostre que X_0 não é contável.

3 Munkres 11.5. Mostre que o lema de Zorn implica o

Lema de Kuratowski: Seja $\mathcal{A}$ uma família não vazia de conjuntos. Suponha que para toda a subcolecção $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ totalmente ordenada pela relação de inclusão a união dos elementos de $\mathcal{B}$ pertence a $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}$ tem um elemento maximal (isto é um elemento que não está contido em nenhum outro elemento de $\mathcal{A}$).

4 Munkres 11.6. Uma colecção não vazia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X diz-se *de tipo finito* se um conjunto $B \in \mathcal{A}$ sse todo o subconjunto finito de B pertence a $\mathcal{A}$. Mostre que o Lema de Kuratowski implica o

Lema de Tukey: Seja $\mathcal{A}$ uma colecção não vazia de conjuntos. Se $\mathcal{A}$ é de tipo finito então $\mathcal{A}$ tem um elemento maximal.

5 Munkres 11.7. Mostre que o lema de Tukey implica o princípio de máximo de Hausdorff. *Sugestão: Se $\leq$ é uma ordem parcial em A, considere a colecção $\mathcal{A}$ dos subconjuntos de A totalmente ordenados por $\leq$ e mostre que $\mathcal{A}$ é de tipo finito.*

6 Munkres 13.3. Mostre que a topologia cocontável $\mathcal{T}_c$ é uma topologia em X. É ou não verdade que

$$\mathcal{T}_\infty = \{U \subset X : X \setminus U \text{ é infinito, ou vazio, ou todo o } X\}$$

é uma topologia em X?

[1] Isto é, existe uma aplicação entre os dois conjuntos que é bijectiva e preserva a ordem?

7 Munkres 13.4.

(a) Seja $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ uma família de topologias em X. Mostre que $\cap\mathcal{T}_\alpha$ é uma topologia em X. É ou não verdade que $\cup\mathcal{T}_\alpha$ é uma topologia?

(b) Seja $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ uma família de topologias em X. Mostre que existe e é única a menos fina das topologias em X que contém todas as topologias $\mathcal{T}_\alpha$, e que existe e é única a mais fina das topologias contida em todos as topologias $\mathcal{T}_\alpha$.

(c) Seja $X = \{a, b, c\}$ e

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}\,.$$

Determine a menos fina topologia contendo $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ e a mais fina topologia contida em $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$.

8 Munkres 13.5. Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma base para uma topologia em X então a topologia gerada por $\mathcal{A}$ é igual à intersecção de todas as topologias que contêm $\mathcal{A}$. Mostre o mesmo para uma subbase $\mathcal{A}$.

9 Munkres 13.7. Considere as seguintes topologias para $\mathbb{R}$:

$\mathcal{T}_1$ = topologia usual,

$\mathcal{T}_2$ = topologia com base formada por todos os intervalos (a, b) e por todos os conjuntos da forma $(a, b) \setminus K$ onde $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

$\mathcal{T}_3$ = topologia cofinita,

$\mathcal{T}_4$ = topologia com base formada por todos os intervalos da forma $(a, b]$,

$\mathcal{T}_5$ = topologia com base formada por todos os intervalos da forma $(-\infty, a)$ como base.

Determine todas as relações de inclusão entre as topologias $\mathcal{T}_i$.

10 Definição de uma topologia por operadores de fecho. Seja X um conjunto e $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ uma função satisfazendo

(i) $\alpha(\emptyset) = \emptyset$,

(ii) $A \subset \alpha(A)$,

(iii) $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$,

(iv) $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

Mostre que a família $\mathcal{T} = \{\alpha(A) : A \subset X\}$ é a família dos conjuntos fechados de uma topologia e que α associa a um conjunto $A \subset X$ o seu fecho nesta topologia. *Sugestão: Comece por mostrar que* $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \subset \alpha(B)$.

11 (Opcional)**A norma p-ádica.** Seja p um número primo [2]. Considere a função

$$| \quad |_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_0^+$$

definida por

$$|x|_p = e^{-\max\{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \,:\, p^k | x\}}.$$

(a) Mostre que $|xy|_p = |x|_p |y|_p$.

(b) Mostre que $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

(c) Mostre que a função $(x, y) \to |x-y|_p$ define uma métrica em $\mathbb{Z}$. A partir de agora consideramos o conjunto dos números inteiros dotado desta métrica.

(d) Descreva a bola de raio $\epsilon > 0$ em torno da origem.

(e) Para $p = 2$, calcule a soma da série

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n + \ldots$$

(f) Para $p = 2$, dê um exemplo de uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{Z}$ que não converge.

12 (Opcional) **A topologia de Zariski.** Seja R um anel comutativo (com identidade). Escrevemos $\operatorname{Spec} R$ para o conjunto dos ideais primos de R. Para cada ideal $I \subset R$ define-se

$$V(I) = \{P \in \operatorname{Spec}(R) : P \supset I\}.$$

(a) Mostre que a família de conjuntos $\{V(I) : I \text{ é um ideal de } R\}$ é a família dos conjuntos fechados de uma topologia em $\operatorname{Spec}(R)$. Esta topologia chama-se a topologia de Zariski.

(b) Descreva o espaço topológico $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

(c) Descreva o espaço topológico $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x])$.

[2] Na realidade, para os efeitos deste exercício p pode ser um número arbitrário mas só se costuma considerar o caso em que p é primo.