Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional
Ficha 12

- Ler as secções 52,53 e 54 do Munkres.
- **Munkres: 52.3,5,6,7; 53.3,5; 54.6**

1 Considere uma família $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ de espaços pontuados. Recorde que o produto na categoria dos grupos é o produto cartesiano com a operação de grupo definida componente a componente. Mostre que

$$\pi_1\left(\prod_\alpha X_\alpha, (x_\alpha)\right) = \prod_\alpha \pi_1(X_\alpha, x_\alpha).$$

2 (Opcional) Recorde que se G é um grupo, a relação de conjugação em G (definida por $g \sim h$ sse $\exists \alpha \in G\colon \alpha g \alpha^{-1} = h$) é uma relação de equivalência em G.

Seja X um espaço conexo por arcos. Mostre que há uma bijecção canónica entre o conjunto das classes de homotopia $[S^1, X]$ e o conjunto das classes de conjugação em $\pi_1(X, x_0)$ onde $x_0 \in X$ é um ponto qualquer.

Sugestão: Use a aplicação quociente $[0,1] \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$.

3 (Opcional) Considere uma sucessão

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$$

de espaços topológicos T_1 com X_n um subespaço de X_{n+1}. Seja $x_0 \in X_1$ e considere a topologia final em $X = \cup_n X_n$.

(a) Descreva $\pi_1(X, x_0)$ em termos de uma propriedade universal que caracteriza os homomorfismos de $\pi_1(X, x_0)$ para um grupo arbitrário G.

(b) Consegue descrever $\pi_1(X, x_0)$ em termos de geradores e relações?

Nota: A propriedade natural que achou descreve o **colimite** do diagrama

$$\pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(X_2, x_0) \to \ldots$$

na categoria dos grupos. Da mesma forma, a propriedade universal da topologia final em X diz que X é o colimite[1] do diagrama $X_1 \to X_2 \to \ldots$ na categoria dos espaços topológicos. Assim, o resultado deste exercício pode ser descrito da seguinte forma: o functor grupo fundamental preserva colimites sequenciais de inclusões de espaços T_1.

[1] Às vezes também chamado o limite indutivo.