Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional
Ficha 13

- Ler as secções 55, 57, 58 e do Munkres.
- **Munkres: 55.2,4; 57.2,4; 58.7,9 ; 59.3(b)**

1 Recorde que os quaterniões $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ são uma álgebra de divisão com a soma definida componente a componente e produto determinado por $i^2 = j^2 = -1, ij = k, ij = -ji$ (e pelo facto de $\mathbb{R}$ estar contido no centro de $\mathbb{H}$).

O **conjugado** de $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ é $\overline{q} = a - bi - cj - dk$.

A **norma** de um quaternião é $||q|| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Considere os seguintes grupos topológicos (onde a topologia é a topologia induzida pela topologia usual em $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ e $M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$)

$$Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} : ||q|| = 1\}$$

e

$$SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t A = I,\ \det A = 1\}.$$

(a) Mostre que para cada $q \in Sp(1)$, a aplicação linear $\phi_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definida por $\phi_q(x) = qx\overline{q}$ preserva o subespaço $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \simeq \mathbb{R}^3$ e que a sua restrição a $\mathbb{R}^3$ é representada na base $\{i, j, k\}$ por uma matriz ortogonal.

(b) Mostre que a aplicação $Sp(1) \to SO(3)$ definida por $q \mapsto \phi_{q|\mathbb{R}^3}$ é um homomorfismo de grupos sobrejectivo e calcule o núcleo.

(c) Conclua que $SO(3)$ é homeomorfo ao espaço projectivo $\mathbb{R}P^3$.

(d) Escreva uma expressão para um representante do gerador de $\pi_1(SO(3), I) \simeq \mathbb{Z}/2$.

2 (Opcionais) **Munkres: 58.8,10**