Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional
Ficha 15

- Ler as secções 79,80 e 82 (e de preferência a 81 também).
- **Munkres: 79.1,2,3,4,5,6,7; 80.1.**

1 Seja $p \in S^3$ e identifiquemos $\mathbb{R}^3$ com $S^3 \setminus \{p\}$ por meio de um homeomorfismo. Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ e $i : \mathbb{R}^3 \setminus K \to S^3 \setminus K$ a inclusão. Mostre que dado $q \in \mathbb{R}^3 \setminus K$, o homomorfismo induzido pela inclusão

$$i_* : \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, q) \to \pi_1(S^3 \setminus K, q)$$

é um isomorfismo.

2 Neste exercício todos os espaços são conexos por arcos e localmente conexos por arcos. Comece por reler o problema opcional 1 da ficha 4 para recordar as definições de termos relativos a acções de grupos.

Seja $p : E \to B$ uma aplicação de revestimento. Uma equivalência de revestimentos $h : E \to E$ diz-se uma **transformação de revestimento**[1]. Claramente, as transformações de revestimento formam um grupo com a operação de composição. Designamos este grupo por $\mathrm{Aut}(p)$.

(a) Mostre que a acção de $\mathrm{Aut}(p)$ em E é livre e própriamente descontínua. *Sugestão: use o teorema de levantamento.*

(b) Mostre que se G é um grupo que age num espaço X de forma livre e própriamente descontínua, então a aplicação quociente $q : X \to X/G$ é um revestimento[2]. Descreva um isomorfismo de grupos

$$G \to \mathrm{Aut}(q).$$

(c) Se $p : E \to B$ é um revestimento universal, $e_0 \in E$ e $b_0 = p(e_0)$ mostre que a aplicação

$$\phi : \mathrm{Aut}(p) \to \pi_1(B, b_0)$$

definida por $\phi(g) = [\alpha]$ onde α é um laço baseado em b_0 tal que o levantamento de α com início em e_0 satisfaz $\tilde{\alpha}(1) = g(e_0)$ está bem definida e é um isomorfismo de grupos. *Sugestão: recorde a demonstração que* $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

[1] Em inglês diz-se *deck transformation.*
[2] Os revestimentos desta forma chamam-se revestimentos regulares.

(d) **Uma maneira de obter qualquer revestimento a partir do revestimento universal:** Seja $p : E \to B$ um revestimento universal e usemos o isomorfismo da alínea anterior para identificar os grupos $\mathrm{Aut}(p)$ com $\pi_1(B, b_0)$. Designando este grupo por G, e sendo H um subgrupo de G seja G/H o conjunto quociente com a topologia discreta e considere-se a acção de G no espaço $E \times G/H$ definida por

$$g \cdot (e, [g']) = (g(e), [gg']).$$

Mostre que tomando $E' = (E \times G/H)/G$ e $q : E' \to B$ a aplicação induzida por $p \circ \pi_1$, temos que q é um revestimento e $q_*(\pi_1(E', [(e_0, [1])])) = H \subset \pi_1(B, b_0)$.

3 Seja $\mathrm{HOM}(X)$ o grupo dos homeomorfismos de um espaço topológico X com a topologia compacta-aberta. Mostre que o subespaço

$$O(2) \subset \mathrm{HOM}(S^1)$$

formado pelas rotações é um retrato por deformação.

Sugestão: Um homeomorfismo de S^1 *tem grau* ± 1*. Comece por mostrar que o conjunto formado pelas aplicações* $x \mapsto x$ *e* $x \mapsto -x$ *é um retrato por deformação de* $\mathrm{HOM}(\mathbb{R})$ *e depois use o teorema de levantamento.*

4 (Opcionais) **Munkres 81.1,2,3,4,5; Exercícios sobre propriedades topológicas e o grupo fundamental p.499: 1 a 5.**