Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional

Ficha sobre Análise Funcional

Uma *norma* num espaço vectorial V sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é uma função $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $||x|| \geq 0$ e $||x|| = 0$ sse $x = 0$,

(ii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,

(iii) $||\alpha x|| \leq |\alpha| ||x||$ para α um escalar.

Um espaço vectorial munido de uma norma diz-se um *espaço normado*. Se V é um espaço normado então $d(x, y) = ||x-y||$ define uma métrica em V e munimos V da topologia determinada por esta métrica. Um espaço normado diz-se um *espaço de Banach* se é completo para esta métrica. Note que um subespaço fechado de um espaço de Banach é um espaço de Banach.

1 Mostre que em qualquer espaço normado se tem a desigualdade $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$.

2 Se $W \subset V$ é um subespaço fechado de um espaço normado, defina uma norma no espaço quociente V/W e mostre que se V é um espaço de Banach o mesmo sucede com V/W.

Sejam V e W espaços normados. Um operador linear $T : V \to W$ diz-se *limitado* se a imagem por T da bola unitária é um conjunto limitado. O conjunto dos operadores limitados entre V e W designa-se por $\mathcal{B}(V, W)$.

3 Sejam V e W espaços normados e $T : V \to W$ um operador linear. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) T é limitado,

(ii) T é contínuo,

(iii) T é contínuo na origem.

Se $T : V \to W$ é um operador limitado entre espaços normados, define-se a *norma* de T por

$$||T|| = \sup \left\{ \frac{||Tx||}{||x||} : x \in V \setminus 0 \right\}.$$

4 Mostre que esta função define uma norma no espaço vectorial $\mathcal{B}(V, W)$ e que se W é um espaço de Banach, o mesmo sucede com $\mathcal{B}(V, W)$.

5 Mostre que se $T : V \to W$ e $S : W \to Z$ são operadores limitados, então $||S \circ T|| \leq ||S||||T||$.

No caso em que W é o corpo dos escalares com a norma usual, $\mathcal{B}(V, W)$ diz-se o *dual* de V e designa-se por V^*. Os elementos de V^* dizem-se *funcionais lineares contínuos* em V. Note que o dual de um espaço normado é sempre um espaço de Banach. Os seguintes exercícios garantem que o dual de um espaço normado é "suficientemente grande".

6 Seja V um espaço normado real e $W \subset V$ um subespaço linear. Seja $\phi : W \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo, $x_0 \in V \setminus W$ e $N = L(W, x_0)$ o subespaço de V gerado por W e x_0. Mostre que ϕ se pode estender a um funcional linear contínuo $\psi : N \to \mathbb{R}$ tal que $||\psi|| \leq ||\phi||$.

7 Deduza o resultado análogo ao do exercício anterior para espaços normados complexos. *Sugestão: Para ver que a norma da extensão não aumenta, considere o caso em que ϕ tem norma 1 e escreva o valor de ψ num vector de norma 1 na forma polar.*

8 **Teorema de Hahn-Banach:** Seja V um espaço normado e $W \subset V$ um subespaço. Qualquer elemento $\phi \in W^*$ pode ser prolongado a um elemento de V^*. *Sugestão: Use o lema de Zorn.*

9 Seja V um espaço normado.

(a) Mostre que se $0 \neq x_0 \in V$, existe um elemento $\phi \in V^*$ com $||\phi|| = 1$ tal que $\phi(x_0) = ||x_0||$.

(b) Mostre que se $W \subset V$ é um subespaço fechado e $x_0 \notin W$, existe $\phi \in V^*$ tal que $\phi(W) = 0$ e $\phi(x_0) \neq 0$. Em particular, os funcionais lineares contínuos separam pontos.

10 Mostre que existe um mergulho isométrico natural $V \to (V^*)^*$. Quando este mergulho é sobrejectivo, o espaço V diz-se *reflexivo*.

11 Uma aplicação típica do teorema de Hahn-Banach: Seja V um espaço de Banach complexo e $f : \mathbb{C} \to V$ uma aplicação diferenciável. Mostre que f é analítica. *Sugestão: Pode definir-se o integral de Riemann de funções contínua $g : [a, b] \to V$ da forma usual. Use o exercício 9 (b) para mostrar que*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=c} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

para todo o z_0 tal que $|z_0| < c$.

12 **Teorema da aplicação aberta:** Se $T : V \to W$ é uma aplicação linear contínua e sobrejectiva entre espaços de Banach, então T é uma aplicação aberta. *Dem: Use o teorema de Baire para concluir que $\overline{T(B_k)}$ tem interior não vazio para algum k onde B_k designa a bola de raio k centrada na origem em V.*

Conclua que existe $\epsilon > 0$ tal que a bola B'_ϵ de raio ϵ em W centrada na origem está contida em $\overline{T(B_1)}$. Dado $y \in B'_\epsilon$, construa uma sucessão de Cauchy $x_n \in B_3$ tal que $T(x_n) \to y$.

13 Mostre que se $T : V \to W$ é um isomorfismo linear contínuo entre espaços de Banach, então a aplicação inversa T^{-1} é contínua.

14 Uma aplicação típica do teorema da aplicação aberta: Formule e demonstre o teorema da função inversa para funções de classe C^1 entre espaços de Banach.

Se V, W são espaços normados. $V \oplus W$ é um espaço normado com a norma $||(v, w)|| = ||v|| + ||w||$. É fácil ver que se V e W são espaços de Banach, o mesmo sucede a $V \oplus W$.

15 Teorema do gráfico fechado: Se V e W são espaços de Banach, uma aplicação linear $T : V \to W$ é contínua sse o gráfico $\{(x, Tx) : x \in V\} \subset V \oplus W$ é fechado. *Sugestão: A restrição da projecção na primeira coordenada ao gráfico é contínua e bijectiva.*

16 Teorema de Banach-Steinhaus: Seja V um espaço de Banach, W um espaço normado, e $\{T_\alpha\}$ uma família de operadores lineares $V \to W$. Se $\{T_\alpha(x)\}$ é um conjunto limitado para todo o $x \in V$, então o conjunto $\{T_\alpha\} \subset \mathcal{B}(V, W)$ é limitado. *Sugestão: Use o teorema de Baire para concluir que $\cup_\alpha T_\alpha(U)$ é limitado para algum aberto U (conforme Munkres Ex.48.10). Depois use linearidade.*

17 Mostre que um subconjunto X de um espaço normado V é limitado sse $\phi(X)$ é limitado para todo o $\phi \in V^*$.