Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional
Ficha 3

Munkres: 18.9,10,11,13; 19.1,3,4,6,7,10.

1 (Opcional) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ um conjunto de objectos de $\mathcal{C}$. Um par $(P, \{\pi_\alpha\}_{\alpha\in J})$ com $P \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ e $\pi_\alpha \in \mathcal{C}(P, X_\alpha)$ diz-se um *produto* dos objectos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ se dado qualquer outro par $(Q, \{\nu_\alpha\}_{\alpha\in J})$ com Q um objecto de $\mathcal{C}$, e $\nu_\alpha \in \mathcal{C}(Q, X_\alpha)$ existe um único morfismo $f \in \mathcal{C}(Q, P)$ tal que

$$\nu_\alpha = \pi_\alpha \circ f \text{ para todo o } \alpha \in J. \tag{1}$$

(a) Mostre que P é um produto sse as projecções π_α determinam uma bijecção

$$\mathcal{C}(Q, P) \to \prod_{\alpha\in J} \mathcal{C}(Q, X_\alpha).$$

onde $\prod$ designa o produto cartesiano de conjuntos.

Em palavras: "P é o produto de $\{X_\alpha\}$ sse dar um morfismo de um objecto Q para P é a mesma coisa que dar um morfismo de Q para cada um dos objectos X_α".

(b) Mostre que se $(P_1, \{\pi_\alpha\}_{\alpha\in J})$ e $(P_2, \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in J})$ são dois produtos de $\{X_\alpha\}$ então existe um único isomorfismo $\phi : P_1 \to P_2$ tal que $\rho_\alpha \circ \phi = \pi_\alpha$.

(c) Descreva o produto nas categorias dos conjuntos, dos espaços topológicos, e dos grupos.

(d) Defina a categoria dos corpos. Existem produtos na categoria dos corpos?