Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional
Ficha 4

- Ler as secções $20, 21$ e 22 do Munkres.
- **Munkres: 20.2,3,4,8; 22.1,2,4**

1 (Opcional) Uma *acção à esquerda* de um grupo G num conjunto X é uma função

$$\alpha : G \times X \to X$$

satisfazendo as seguintes relações (onde e designa o elemento neutro de G):

(i) $\alpha(e, x) = x$,

(ii) $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$.

É costume escrever gx em vez de $\alpha(g, x)$. Seja X um espaço topológico. Uma *acção à esquerda* de G no espaço X é uma acção à esquerda $\alpha : G \times X \to X$ que é contínua quando se dá a G a topologia discreta e a $G \times X$ a topologia produto.

(a) Mostre que $x \mapsto gx$ é um homeomorfismo de X para cada $g \in G$.

(b) Mostre que $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y$ é uma relação de equivalência em X. As classes de equivalência chamam-se *órbitas* da acção. O *espaço quociente* pela acção de G é o conjunto X/G das órbitas com a topologia quociente.

(c) Se X é um espaço de Hausdorff, a acção diz-se *própriamente descontínua* se dados $x, y \in X$ existem U vizinhança de x e V vizinhança de y tais que $\{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\}$ é finito. Mostre que nesse caso, o *estabilizador de* $x \in X$, $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ é um grupo finito.

(d) Mostre que se uma acção de G num espaço Hausdorff X é própriamente descontínua então X/G é Hausdorff.

(e) Mostre que se a acção de G em X é própriamente descontínua e *livre* (isto é, $G_x = \{e\}$ para todo o $x \in X$), então a projecção $p : X \to X/G$ é um *homeomorfismo local*, isto é, para todo o $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que $p_{|U}$ é um mergulho.

(f) Dê um exemplo de uma acção de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ com a topologia usual, tal que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ não seja Hausdorff.

2 (Opcional) Exercícios suplementares sobre grupos topológicos (Munkres p.145): 2,3,4,5,7.