Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional
Ficha 6

- Ler as secções $26, 27$ e 37 do Munkres.
- **Munkres: 26.1,5,8,11,12 ; 27.3,5 ; 37.1[1],4,5[2]**

1 (Opcional) Seja
$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$$
uma sucessão de espaços T_1, e $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ com a topologia final. Mostre que se K é compacto e $f : K \to X$ é contínua, então existe N tal que $f(K) \subset X_N$.

2 (Opcional) Considere a torre de homomorfismos de grupos
$$\mathbb{Z}/p \longleftarrow \mathbb{Z}/p^2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow Z/p^n \longleftarrow \cdots \tag{1}$$
onde $\mathbb{Z}/n$ designa o quociente do grupo dos inteiros pelo subgrupo gerado por n, e as aplicações $\pi_k : Z/p^{k+1} \to Z/p^k$ são as projecções óbvias. Define-se o grupo dos inteiros p-ádicos por
$$\widehat{\mathbb{Z}}_p = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{Z}/p^n \text{ e } \pi_n(x_{n+1}) = x_n \quad \forall n\} \subset \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p^n$$
com a topologia induzida pela topologia produto ($\widehat{Z}_p$ é o *limite* (antigamente chamava-se o limite inverso ou limite projectivo) da torre (1)).

(a) Mostre que $\widehat{Z}_p$ é um grupo topológico compacto e totalmente desconexo.

(b) Defina um homomorfismo de grupos $\phi : \mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{Z}}_p$, e uma métrica d em $\widehat{Z}_p$ tal que ϕ é um mergulho isométrico quando damos a $\mathbb{Z}$ a métrica p-ádica (ver ficha 1).

(c) Mostre que $\phi(\mathbb{Z})$ é denso em $\widehat{Z}_p$.

(d) Mostre que qualquer sucessão de Cauchy em $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ converge.

3 (Opcional) **O truque de Alexander.** A esfera de dimensão n é o espaço $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}^n$. A bola de dimensão n é $D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ também com a topologia induzida.

Seja $h : S^n \to S^n$ um homeomorfismo. Mostre que o espaço que se obtem identificando o bordo de uma bola de dimensão $n+1$ com o bordo de outra por

[1] Na alínea (c), X tem de ser Hausdorff
[2] Opcional

h (isto é, o espaço quociente da união disjunta $D^{n+1} \coprod D^{n+1}$ pela relação de equivalência gerada por $x \sim h(x)$) é homeomorfo a S^{n+1}.

Sugestão: Se $h : S^n \to S^n$ é um homeomorfismo, é fácil achar um homeomorfismo $\tilde{h} : D^{n+1} \to D^{n+1}$ cuja restrição ao bordo é h.

Nota: Se h é um difeomorfismo, é fácil ver que o espaço quociente é uma variedade diferenciável de dimensão $n + 1$. Esta variedade não é no entanto necessáriamente difeomorfa a S^{n+1}! Este último facto foi observado pela primeira vez por John Milnor em 1958 e valeu-lhe pouco depois uma medalha Fields.