Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional
Ficha 7

- Ler as secções 28, 29 e 30 do Munkres.
- **Munkres: 28.3,4,5,7**[1] **; 29.2,4,8 ; 30.5,6,9,18**[2]

1 (Opcional) **Curvas de Peano.** Recorde que designando por C o conjunto de Cantor, a aplicação

$$\phi : \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 2\} \to C$$

definida pela expressão

$$\phi((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

é um homeomorfismo quando damos a $\{0, 2\}$ a topologia discreta.

(a) Mostre que se J é contável, $\prod_{\alpha \in J} C$ é homeomorfo a C.

(b) Ache uma função $\psi : C \to [0, 1]$ contínua e sobrejectiva. *Nota: Isto implica que o intervalo é um espaço quociente do conjunto de Cantor!*

(c) Mostre que qualquer aplicação contínua $\eta : C \to [0, 1]$ pode ser prolongada a uma função contínua $\tilde{\eta} : [0, 1] \to [0, 1]$.

(d) Conclua que existem aplicações contínuas e sobrejectivas $[0, 1] \to [0, 1]^n$ para todo o n tal que $2 \leq n \leq \infty$. *Nota: Portanto pode preencher-se um espaço de qualquer dimensão ycom uma curva! Estas curvas que preenchem espaço chamam-se* **Curvas de Peano.**

(e) Mostre que não existem aplicações contínuas e bijectivas $\alpha : [0, 1] \to [0, 1]^n$ para $n > 1$.

O **Teorema de Hahn-Mazurkiewicz** caracteriza todos os espaços que são imagens (e portanto espaços quociente) de um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ por uma função contínua: são os espaços compactos, conexos, fracamente localmente conexos (i.e. para qualquer vizinhança U de um ponto $x \in X$ existe um subconjunto conexo $C \subset U$ tal que C contém uma vizinhança de x) e metrizáveis. Um pouco mais à frente tornar-se-á fácil mostrar uma das implicações.

[1] Opcional
[2] Opcional