Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional
Ficha 9

- Ler as seções 34,35,36 e 38 do Munkres.
- Fazer o maior número possível dos exercícios de revisão das páginas 228-229 do Munkres (não são para entregar).
- **Munkres:** Exercícios suplementares sobre redes (p. 187): 10.
- **Munkres: 31.7; 32.9 ; 33.8 ; 34.3,4,8 ; 35.3,5,6,7 ; 36.1,4[1] ; 38.3,5,8**

1 (Opcionais[2]) **Munkres: 31.8; 33.10,11; 35.8(*),9; 36.5(*); 38.9.**

2 (Opcional[3])**Não basta considerar subconjuntos cofinais.** Seja $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com a seguinte topologia: Se $(m, n) \neq (0, 0)$, o conjunto $\{(m, n)\}$ é aberto; um subconjunto $U \subset X$ é uma vizinhança de $(0, 0)$ sse excepto para um número finito de valores de m, o conjunto $\{n : (m, n) \notin U\}$ é finito. Mostre que não existe nenhuma sucessão em $X \setminus \{(0, 0)\}$ que convirja para $(0, 0)$, mas que no entanto existe uma sucessão em $X \setminus \{(0, 0)\}$ com uma subrede convergente para $(0, 0)$.

3 (Opcional[4]) **Um conjunto totalmente ordenado com a topologia da ordem é completamente normal.** Seja X um conjunto totalmente ordenado com a topologia da ordem. Sejam $A, B \subset X$ conjuntos separados (isto é, tais que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$)

(a) Mostre que uma união de subconjuntos convexos de X com um ponto em comum é convexo, e logo que qualquer $Y \subset X$ se pode escrever como uma união disjunta de subconjuntos convexos maximais chamados *componentes convexas de Y*.

(b) Definimos
$$A^* = \cup_{a,b \in A, [a,b] \cap \overline{B} = \emptyset} [a, b]$$
e análogamente B^*. Note que $A \subset A^*$ e $B \subset B^*$. Mostre que $\overline{A^*} \subset \overline{A} \cup A^*$.

(c) Mostre que A^* e B^* são conjuntos separados.

[1] Na realidade esta propriedade caracteriza os espaços normais em termos de coberturas.
[2] Os exercícios marcados com um (*) são particularmente recomendados.
[3] Adaptado de Kelley,"General Topology"
[4] Adaptado de Steen e Seebach, "Counterexamples in Topology".

(d) Seja $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ o conjunto das componentes convexas de A^*, $\mathcal{B} = \{B_\beta\}$ o conjunto das componentes convexas de B^*, e $\mathcal{C} = \{C_\gamma\}$ o conjunto das componentes convexas de $X \setminus (A^* \cup B^*)$. Mostre que a ordem em X induz uma ordem total no conjunto $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

(e) Seja M_α o conjunto dos majorantes estritos de A_α. Mostre que se $A_\alpha \cap \overline{M_\alpha} \neq \emptyset$, então $A_\alpha \cap \overline{M_\alpha}$ consiste num único ponto p_α. $p_\alpha \in \overline{C_\gamma}$ para algum γ e na ordem considerada na alínea anterior, C_γ é o sucessor imediato de A_α.

(f) Fixe-se para cada δ um elemento $k_\delta \in C_\delta$ e definam-se os conjuntos

$$I_\alpha = \begin{cases} [p_\alpha, k_\gamma) & \text{se } A_\alpha \cap \overline{M_\alpha} \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(onde γ é tal que C_γ é o sucessor imediato de A_α). De maneira análoga defina conjuntos $J_\alpha = (k_\delta, q]$ e I_β, J_β. Mostre que

$$U = \cup_\alpha J_\alpha \cup A_\alpha \cup I_\alpha \text{ e } V = \cup_\beta J_\beta \cup B_\beta \cup I_\beta$$

são abertos disjuntos de X. Isto mostra que X é completamente normal (isto é, conjuntos separados podem ser separados por abertos).