O homomorfismo $Sp(1) \to SO(3)$

No que diz respeito ao exercício 1 da ficha 13, a única coisa que ficou por ver na aula prática foi que o homomorfismo de grupos

$$\Psi : Sp(1) \to SO(3)$$

definido por $\Psi(q)\vec{v} = q\vec{v}\,\bar{q}$ é uma aplicação sobrejectiva. Eis uma maneira de ver isso com um mínimo de contas, e que ao mesmo tempo dá uma interpretação geométrica do homomorfismo:

Recorde que escrevendo um quaternião na forma $a + \vec{u}$ com $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ se tem

$$(a + \vec{u})(b + \vec{v}) = (ab - \vec{u} \cdot \vec{v}) + a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}$$

Portanto escrevendo $q = a + \vec{u}$ temos

$$\begin{aligned} \Psi(q)\vec{v} &= (a + \vec{u})\vec{v}(a - \vec{u}) \\ &= a^2\vec{v} - 2a\vec{v} \times \vec{u} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u}) \end{aligned}$$

e usando a fórmula $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ isto fica

$$\Psi(q)\vec{v} = (a^2 - ||u||^2)\vec{v} - 2a\vec{v} \times \vec{u} + 2(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}.$$

Daqui se conclui que se $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{u}$ então $\vec{v}$ é fixo por $\Psi(q)$.

Por outro lado se $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{u}$, então

$$\Psi(q)\vec{v} = (a^2 - ||u||^2)\vec{v} - 2a||u||\vec{v} \times \frac{\vec{u}}{||u||}$$

Tomando, sem perda de generalidade $||v|| = 1$, temos que $\{\vec{v} \times \frac{\vec{u}}{||u||}, \vec{v}\}$ é uma base ortonormal para o plano ortogonal a $\vec{u}$ e

$$(a^2 - ||u||^2)^2 + 4a^2||u||^2 = ||q||^4 = 1$$

logo tomando

$$\theta = \arctan \frac{2a||u||}{||u||^2 - a^2}$$

conclui-se que $\Psi(q)$ é a rotação pelo ângulo θ em torno do eixo orientado determinado por $\vec{u}$.

Claramente consegue obter-se qualquer rotação desta maneira logo o homomorfismo é sobrejectivo.