T.G.I.A.F.
RESUMOS DAS AULAS
PRIMAVERA 02/03

GUSTAVO GRANJA

1. Resultados de teoria de conjuntos

(1) Uma *ordem parcial* $\leq$ num conjunto X é uma relação em X satisfazendo as seguintes propriedades
   (i) $x \leq x$,
   (ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$,
   (iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.
   Diz-se que $(X, \leq)$ é um *conjunto parcialmente ordenado*. Uma *ordem parcial estrita* $<$ num conjunto X é uma relação em X satisfazendo as seguintes propriedades
   (i) $x < x$ é falso,
   (ii) $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$,
   Há uma correspondência biunívoca entre ordens parciais e ordens parciais estritas: Dada uma ordem parcial $\leq$, a relação $<$ definida por $x < y$ sse $x \leq y$ e $x \neq y$ é uma ordem parcial estrita; reciprocamente dada uma ordem parcial estrita $<$ obtem-se uma ordem parcial $\leq$ definindo $x \leq y$ sse $x < y$ ou $x = y$.

(2) Uma relação de ordem parcial $\leq$ em X diz-se *total* se para todos os $x, y \in X$ se tem ou $x \leq y$ ou $y \leq x$. Nesse caso diz-se que X está *totalmente ordenado*.

(3) Um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ está *bem ordenado* se todo o subconjunto não vazio de X tem um elemento minimal. Nesse caso diz-se que $\leq$ é uma *boa ordem*.

(4) Uma boa ordem é necessáriamente uma ordem total.

(5) Se $(X, \leq)$ é um conjunto bem ordenado, e $\alpha \in X$, a *secção de X por α* é o conjunto
$$S_\alpha = \{x \in X : x < \alpha\}.$$
   A associação $\alpha \mapsto S_\alpha$ estabelece uma correspondência entre elementos de conjuntos bem ordenados e conjuntos bem ordenados.

(6) Seja $(X, \leq)$ um conjunto bem ordenado. Um subconjunto $A \subset X$ diz-se *indutivo* se $S_\alpha \subset A \Rightarrow \alpha \in A$.

Date: June 4, 2003.

(7) **Princípio da indução (transfinita):** Seja $(X, \leq)$ um conjunto bem ordenado e $A \subset X$ um subconjunto indutivo. Então $A = X$.
(8) **Princípio da definição recursiva:** Seja $(X, \leq)$ um conjunto bem ordenado, Y um conjunto qualquer, $\mathcal{F}$ a família de todas as funções de secções de X em Y, e $\rho : \mathcal{F} \to Y$ uma função. Então existe uma única função $h : X \to Y$ satisfazendo a fórmula

$$h(\alpha) = \rho(h_{|S_\alpha}).$$

(9) **Teorema de Zermelo (Princípio da boa ordenação):** Todo o conjunto pode ser bem ordenado.
(10) Existe um conjunto bem ordenado A com um máximo Ω tal que a secção S_Ω não é contável, mas qualquer outra secção de A é contável. Chama-se a S_Ω (ou a Ω) o *primeiro ordinal não contável*.
(11) Se $N \subset S_\Omega$ é um conjunto numerável, então N tem um majorante.
(12) Dado um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$, uma *cadeia* em X é um subconjunto $Y \subset X$ tal que a restrição da relação $\leq$ a X é uma ordem total.
(13) **Princípio de máximo de Hausdorff:** Todo o conjunto parcialmente ordenado tem uma cadeia maximal.
(14) **Lema de Zorn:** Seja X um conjunto parcialmente ordenado. Se toda a cadeia $Y \subset X$ tem um majorante, então X tem um elemento maximal.

2. Espaços topológicos: definições e propriedades elementares

(1) Uma topologia para o conjunto X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tal que
  (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
  (ii) $X_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \cup X_\alpha \in \mathcal{T}$ (isto é, $\mathcal{T}$ é fechado para uniões arbitrárias),
  (iii) $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \cap X_i \in \mathcal{T}$ (isto é, $\mathcal{T}$ é fechado para intersecções finitas).

  Um par $(X, \mathcal{T})$ diz-se um *espaço topológico*. Os elementos de $\mathcal{T}$ dizem-se os *abertos* de $\mathcal{T}$.
(2) Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias para X. Diz-se que $\mathcal{T}$ é *mais fina* do que $\mathcal{T}'$ e que $\mathcal{T}'$ é *menos fina* do que $\mathcal{T}$ se $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$. $\mathcal{T}$ é *estritamente mais fina* do que $\mathcal{T}'$ se existe $A \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$. Se $\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}' \not\subset \mathcal{T}$ diz-se que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ *não são comparáveis*.
(3) Uma *base* para uma topologia em X é uma colecção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X satisfazendo
  (i) Para todo o $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$,

(ii) Para todo o $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(4) Dada uma base $\mathcal{B}$, a família

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \colon \text{Para todo o } x \in A\ \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset A\}$$

é uma topologia em X. Diz-se que $\mathcal{T}$ é a *topologia gerada* pela base $\mathcal{B}$ e que $\mathcal{B}$ é uma *base para a topologia* $\mathcal{T}$.

(5) Uma *métrica* num conjunto X é uma função

$$d \colon X \times X \to \mathbb{R}_0^+$$

satisfazendo as seguintes propriedades:
(i) $d(x, y) = 0$ sse $x = y$,
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
Um par (X, d) com d uma métrica diz-se um *espaço métrico*.

(6) Se (X, d) é um espaço métrico, a *bola aberta de raio ϵ centrada em $x \in X$* é o conjunto

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

(7) Se (X, d) é um espaço métrico, a *topologia determinada pela métrica* é a topologia gerada pela base $\{B_\epsilon(x) \colon \epsilon > 0, x \in X\}$.

(8) Se $\mathcal{T}$ é a topologia gerada por uma base $\mathcal{B}$ então $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

(9) Seja X um conjunto.
(i) Se $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em X, a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é a família de todos os conjuntos que se podem escrever como uniões de elementos de $\mathcal{B}$ (incluindo a união vazia).
(ii) Seja $\mathcal{T}$ é uma topologia em X, e $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Se para todo o $A \in \mathcal{T}$ e $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$, então $\mathcal{B}$ é uma base que gera a topologia $\mathcal{T}$.

(10) Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias no conjunto X, $\mathcal{B}$ uma base para $\mathcal{T}$ e $\mathcal{B}'$ uma base para $\mathcal{T}'$. Então $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ sse para todo o $B \in \mathcal{B}$ e $x \in B$ existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset \mathcal{B}$.

(11) Uma *subbase de topologia num conjunto X* é uma colecção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X cuja união é todo o X.

(12) Se $\mathcal{S}$ é uma subbase de topologia, a família

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i=1}^n S_i \colon S_i \in \mathcal{S}\}$$

é uma base de topologia em X. $\mathcal{B}$ diz-se a base determinada pela subbase $\mathcal{S}$. A topologia gerada por $\mathcal{B}$ diz-se também a *topologia gerada por $\mathcal{S}$*.

(13) Seja $(X, <)$ um conjunto totalmente ordenado. Definimos para $a, b \in X$,

$$(a, b) = \{x \in X \colon a < x < b\},$$
$$(-\infty, a) = \{x \in X \colon x < a\},$$
$$(a, +\infty) = \{x \in X \colon x > a\}.$$

A *topologia da ordem em* X é a topologia que tem por base a família de todos estes subconjuntos de X.

(14) Se X, Y são espaços topológicos, a *topologia produto em* $X \times Y$ é a topologia com base

$$\{U \times V \colon U \text{ um aberto de } X, V \text{ um aberto de } Y\}.$$

(15) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, e $Y \subset X$ um subconjunto de X. A *topologia induzida em* Y é a topologia com base

$$\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y \colon A \in \mathcal{T}\}.$$

Os elementos de $\mathcal{T}_Y$ dizem-se *abertos em* Y ou *abertos relativos.*

(16) Seja X um espaço topológico. Um conjunto $F \subset X$ diz-se *fechado* se F^c é um aberto.

(17) Seja X um espaço topológico. Então
   (i) $\emptyset$ e X são fechados,
   (ii) Se F_α são fechados, então $\cap_\alpha F_\alpha$ é um fechado,
   (iii) Se $F_1, \ldots F_n$ são fechados então $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ é um fechado.

(18) Uma família de $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ subconjuntos satisfaz as condições da proposição anterior sse $\mathcal{T} = \{U \colon U^c \in \mathcal{F}\}$ é uma topologia em X e nesse caso $\mathcal{F}$ é a família dos subconjuntos fechados para a topologia $\mathcal{T}$.

(19) O *fecho de* A é a intersecção de todos os fechados que contêm A. Escreve-se $\overline{A}$ para o fecho de A.

(20) O *interior de* A é a união de todos os abertos que estão contidos em A. Escreve-se $\operatorname{int} A$ para o interior de A.

(21) O *exterior de* A é $\operatorname{ext} A = \operatorname{int} A^c$.

(22) A *fronteira de* A é o conjunto $\operatorname{front} A = X \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A)$.

(23) Um conjunto $U \subset X$ diz-se uma *vizinhanca de* $x \in X$ se U é um aberto e $x \in U$.

(24) Para todo o conjunto $A \subset X$ tem-se $\operatorname{int} A \subset A \subset \overline{A}$.

(25) Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Então $x \in \overline{A}$ sse para toda a vizinhança U de x se tem $U \cap A \neq \emptyset$.

(26) Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. $x \in X$ diz-se um *ponto de acumulação de* A se para toda a vizinhança U de x se tem $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de A chama-se o *derivado* de A e nota-se A'.

(27) Seja X espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A} = A \cup A'$.

(28) Um espaço topológico X diz-se T_1 se para todo o $x \in X$, $\{x\}$ é um fechado de X.

(29) Um espaço topológico X diz-se *Hausdorff* se para todos os $x, y \in X$ com $x \neq y$ existem U vizinhança de x e V vizinhança de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

(30) A topologia determinada por uma métrica é Hausdorff.

(31) X é T_1 sse para todos os $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe uma vizinhança U de x tal que $y \notin U$.

(32) Se X é um espaço T_1 então $x \in A'$ sse toda a vizinhança de x contem infinitos pontos de A.
(33) Uma sucessão (x_n) em X *converge para* $x \in X$ se para toda a vizinhança U de x existe N tal que $n > N \Rightarrow x_n \in U$.
(34) Seja X um espaço Hausdorff, e (x_n) uma sucessão em X. Se (x_n) converge, o seu limite é único.

3. Funções contínuas

(1) Sejam X, Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ diz-se *contínua* se para todo o aberto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ é um aberto de X.
(2) As seguintes afirmações são equivalentes:
  (i) f é contínua.
  (ii) $f^{-1}(F)$ é fechado para todo o F fechado.
  (iii) Para todo o $A \subset X$ tem-se $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(3) Uma função $f : X \to Y$ diz-se *contínua em* $x \in X$ se para toda a vizinhança V de $f(x)$ existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$.
(4) Uma função $f : X \to Y$ é contínua sse f é contínua em x para todo o $x \in X$.
(5) Se (X, d) e (Y, d') são espaços métricos então $f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ para as topologias determinadas pela métrica sse para todo o $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.
(6) **Propriedades das funções contínuas:**
  (a) A identidade de X é contínua.
  (b) As funções constantes são contínuas.
  (c) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas então $g \circ f$ é contínua.
  (d) Se $A \subset X$ e $f : X \to Y$ é contínua então $f_{|A} : A \to Y$ é contínua. Em particular, a inclusão de um subespaço é uma função contínua.
  (e) Se $f : X \to Y$ é contínua e $f(X) \subset Z$ então a função $f : X \to Z$ é contínua quando se dá a Z a topologia induzida.
(7) Uma função $f : X \to Y$ diz-se um *homeomorfismo* se f é bijectiva e tanto f como f^{-1} são contínuas. f diz-se um *mergulho* se $f : X \to f(X) \subset Y$ é um homeomorfismo.
(8) Um homeomorfismo induz uma bijeção entre as topologias de X e de Y pelo que qualquer propriedade topológica (isto é uma propriedade que é determinada pela topologia) é válida para X sse é válida para Y.
(9) **Lema da colagem:** Sejam X, Y espaços topológicos, A_1 e A_2 fechados de X tais que $X = A_1 \cup A_2$ e $g_1 : A_1 \to Y$, $g_2 : A_2 \to Y$

duas funções contínuas[1]. Então a função $f : X \to Y$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g_2(x) & \text{se } x \in A_2 \end{cases}$$

é uma função contínua em X.

(10) Se $\{U_\alpha\}$ é uma família de abertos de X cuja união é X e $g_\alpha : U_\alpha \to Y$ são funções contínuas tais para todo α, β se tem $g_{\alpha_{|U_\alpha \cap U_\beta}} = g_{\beta_{|U_\alpha \cap U_\beta}}$ então $f : X \to Y$ definida por

$$f(x) = g_\alpha(x) \text{ se } x \in U_\alpha$$

é uma função contínua.

4. Digressão: Definição de categoria

(1) Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste em
   (i) Uma colecção $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ cujos elementos se designam por *objectos de* $\mathcal{C}$,
   (ii) Para cada par (X, Y) de objectos de $\mathcal{C}$ um conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ cujos elementos se designam por *morfismos de* X *para* Y ou *setas de* X *para* Y.
   (iii) Para cada $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ um elemento $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ dito a *identidade de* X,
   (iv) Para cada triplo (X, Y, Z) de objectos de $\mathcal{C}$ uma aplicação

$$\mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(X, Z)$$

   chamada *composição de morfismos*,

satisfazendo os dois axiomas:
   (a) Para todos os $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C},\ f \in \mathcal{C}(X, Y), g \in \mathcal{C}(Y, Z)$

$$g \circ \mathrm{id}_Y = g \quad \text{ e } \mathrm{id}_Y \circ f = f$$

   (b) Para todos os $X, Y, Z, W \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C},\ f \in \mathcal{C}(X, Y), g \in \mathcal{C}(Y, Z), h \in \mathcal{C}(Z, W)$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(2) **Exemplos:**
   (a) *A categoria dos conjuntos.* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ é a colecção de todos os conjuntos. Dados dois conjuntos X, Y define-se $\mathcal{C}(X, Y)$ como o conjunto de todas as funções $f : X \to Y$. Define-se id_X como sendo a aplicação identidade $X \to X$ e $\circ$ como a composição de funções. Os dois axiomas (a) e (b) na definição de categoria são claramente verificados.

[1]Para as topologias induzidas por X em A_1 e A_2 respectivamente.

(b) *A categoria dos espaços topológicos.* Ob$\mathcal{C}$ é a colecção de todos os espaços topológicos. Dados espaços topológicos X, Y define-se $\mathcal{C}(X, Y)$ como o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \to Y$. Define-se id_X como sendo a aplicação identidade e $\circ$ como sendo a composição de funções (isto faz sentido porque a identidade é uma função contínua e a composta de funções contínuas é uma função contínua). Note-se que como as funções contínuas são, em particular, funções, os dois axiomas (a) e (b) na definição de categoria verificam-se pelo exemplo anterior.

(c) *A categoria dos grupos.* Ob$\mathcal{C}$ é a colecção de todos os grupos. Dados dois grupos G e H, o conjunto $\mathcal{C}(G, H)$ é o conjunto de todos os homomorfismos de grupo de G para H. id_G é a identidade de G e $\circ$ é a composição de homomorfismos. Novamente, estas definições fazem sentido porque a identidade é um homomorfismo de grupos e a composição de homomorfismos é um homomorfismo. Mais uma vez, sendo os homomorfismos, em particular, funções, os dois axiomas (a) e (b) são satisfeitos.

(d) *A categoria de um grupo.* Seja G um grupo. Podemos definir uma categoria a partir de G da seguinte forma: Ob$(\mathcal{C})$ tem um único elemento, a que chamamos $*$. Definimos $\mathcal{C}(*, *) = G$, $\mathrm{id}_* = e$ onde e é o elemento neutro do grupo G e definimos a operação $\circ : \mathcal{C}(*, *) \times \mathcal{C}(*, *) \to \mathcal{C}(*, *)$ como sendo a multiplicação do grupo. O axioma (a) é satisfeito porque e é o elemento neutro para a multiplicação do grupo. O axioma (b) é satisfeito porque a multiplicação de G é associativa (por definição de grupo).

(3) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, e X, Y objectos de $\mathcal{C}$. Diz-se que um morfismo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ é um *isomorfismo* entre X e Y se existe $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Por exemplo: na categoria dos conjuntos um isomorfismo é simplesmente uma bijecção; na categoria dos grupos, um isomorfismo é um isomorfismo de grupos; na categoria dos espaços topológicos, um isomorfismo é um homeomorfismo. *Exercício: Mostre que o g na definição de isomorfismo, se existe é único.*

5. A topologia produto

(1) Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de conjuntos. O *produto cartesiano* da família $\{X_\alpha\}$ é o conjunto

$$\prod_{\alpha \in J} X_\alpha = \{f : J \to \cup_{\alpha \in J} X_\alpha \text{ tal que } f_\alpha(x) \in X_\alpha\}.$$

Em vez de f para um elemento do produto cartesiano, é costume escrever $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ onde $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ representa a função f definida por $f(\alpha) = x_\alpha$. Chama-se *projecção* na componente β à função

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$$

definida por $\pi_\beta\left((x_\alpha)_{\alpha\in J}\right) = x_\beta$.

(2) Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família de espaços topológicos. A *topologia produto* em $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ é a topologia com sub-base

$$\cup_{\alpha\in J}\mathcal{S}_\alpha$$

onde $\mathcal{S}_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : U \text{ é um aberto de } X_\alpha\}$. Se não se disser nada em contrário considera-se sempre que um produto de espaços topológicos está dotado desta topologia.

(3) Uma base para a topologia produto é a família

$$\left\{\prod_{\alpha\in J} U_\alpha\right\}$$

onde U_α são abertos de X_α tais que $U_\alpha = X_\alpha$ excepto para um número finito de $\alpha' s$.

(4) As projeções $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$ são funções contínuas. A topologia produto é a menos fina de todas as topologias em $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ que torna todas as projecções π_β contínuas.

(5) Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família de espaços topológicos. A *topologia caixa* em $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ é a topologia com base

$$\left\{\prod_{\alpha\in J} U_\alpha \colon U_\alpha \text{ é um aberto de } X_\alpha\right\}.$$

(6) A topologia caixa é mais fina que a topologia produto. Se J é finito as duas topologias coincidem.

(7) Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família de espaços topológicos e $A_\alpha \subset X_\alpha$. Então

$$\prod_{\alpha\in J}\overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha}$$

quando $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ é dotado da topologia produto ou da topologia caixa.

(8) **Propriedade universal da topologia produto:** Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família de espaços topológicos, A um espaço topológico e $g : A \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ uma função. Então

$$g \text{ é contínua } \Leftrightarrow \pi_\alpha \circ g \text{ é contínua para todo o } \alpha \in J.$$

(9) Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ diz-se *metrizável* se existe uma métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mathcal{T}$ é a topologia induzida pela métrica d.

(10) Se (X, d) é um espaço métrico e $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ é a função definida por

$$\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\},$$

então $\overline{d}$ é uma métrica e a topologia induzida por $\overline{d}$ em X coincide com $\mathcal{T}$. Chama-se a $\overline{d}$ a *métrica limitada standard* determinada por d.

(11) Se J é um conjunto, define-se o conjunto
$$\mathbb{R}^J = \prod_{\alpha\in J} \mathbb{R}.$$
Seja $\overline{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ a métrica limitada standard (isto é $\overline{d}(a,b) = \min\{|a-b|, 1\}$). A função $\rho : \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}_0^+$ definida por
$$\rho(x,y) = \sup\left\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in J\right\}$$
é uma métrica, chamada a *métrica uniforme em* $\mathbb{R}^J$. A topologia determinada por ρ chama-se a *topologia uniforme* em $\mathbb{R}^J$.

(12) Sejam
   (i) $\mathcal{T}_1$ a topologia produto em $\mathbb{R}^J$,
   (ii) $\mathcal{T}_2$ a topologia uniforme em $\mathbb{R}^J$,
   (iii) $\mathcal{T}_3$ a topologia caixa em $\mathbb{R}^J$.

   Então $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_3$. Se J é infinito, todas as inclusões são estritas.

(13) Seja $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n=1}^\infty \mathbb{R}$, e $D : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}_0^+$ a função definida por
$$D(x,y) = \sup\left\{\frac{\overline{d}(x_n, y_n)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
(onde $\overline{d}$ é a métrica limitada em $\mathbb{R}$). Então D é uma métrica em $\mathbb{R}^\omega$ e a topologia induzida por esta métrica é a topologia produto em $\mathbb{R}^\omega$.

(14) Se X é um espaço metrizável, e $A \subset X$, então $x \in \overline{A}$ sse existe uma sucessão $x_n \in A$ tal que x_n converge para x.

(15) A topologia caixa em $\mathbb{R}^w$ não é metrizável.

(16) A topologia produto em $\mathbb{R}^J$ não é metrizável se J não for contável.

6. A topologia quociente

(1) Sejam X, Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ diz-se *aberta* se para todo o U aberto de X, $f(U)$ é um aberto. Diz-se *fechada* se para todo o F fechado de X, $f(F)$ é um fechado de Y.

(2) A projecção $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$ é uma aplicação aberta.

(3) Sejam X, Y espaços topológicos e $p : X \to Y$ uma função sobrejectiva. f diz-se uma *aplicação quociente* quando $p^{-1}(U)$ é aberto em X sse U é aberto em Y (ou equivalentemente, se $p^{-1}(F)$ é fechado em X sse F é fechado em Y).

(4) Dada uma função sobrejectiva $p : X \to Y$, um subconjunto $A \subset X$ diz-se *saturado* com respeito à aplicação p se $A = p^{-1}(p(A))$.

(5) Uma função $f : X \to Y$ é uma aplicação quociente sse f é contínua, sobrejectiva, e leva abertos saturados (equivalentemente, fechados saturados) em abertos (fechados). Em particular uma aplicação contínua, sobrejectiva e aberta (ou fechada) é uma aplicação quociente.

(6) Seja X um espaço topológico, Y um conjunto e $p : X \to Y$ uma função sobrejectiva. A única topologia $\mathcal{T}$ em Y que torna p uma aplicação quociente chama-se a *topologia quociente* em Y (determinada por p). Por definição de aplicação quociente,

$$\mathcal{T} = \{U \subset Y : p^{-1}(U) \subset X \text{ é aberto }\}.$$

(7) Recorde-se que uma *relação de equivalência em* X é um subconjunto $\sim \subset X \times X$ tal que (escrevendo, como é costume, $x \sim y$ em vez de $(x, y) \in \sim$):
   (i) $x \sim x$,
   (ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
   (iii) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

   A *classe de equivalência* de $x \in X$ é o conjunto $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$. O conjunto das classes de equivalência X^* ou $X/\sim$ chama-se *conjunto quociente*. As classes de equivalência formam uma partição de X em conjuntos disjuntos. Reciprocamente, dada uma partição de X em conjuntos disjuntos X_α há uma única relação de equivalência em X para a qual as classes de equivalência são precisamente os X_α.

(8) Se $\sim$ é uma relaç ao de equivalência num espaço topológico, $X/\sim$ com a topologia quociente determinada pela projeção $x \mapsto [x]$ diz-se *o espaço quociente de* X pela relação de equivalência $\sim$.

(9) Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente, e $A \subset X$ um subconjunto saturado em relação a p, e seja $q = p_{|A} : A \to p(A)$. Então
   (a) Se A é um aberto ou um fechado então q é uma aplicação quociente.
   (b) Se p é aberta ou fechada, q é uma aplicação quociente.

(10) Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente, Z um espaço topológico e $g : X \to Z$ uma função tal que $g_{|p^{-1}(y)}$ é constante para todo o $y \in Y$. Então g determina uma aplicação $f : Y \to Z$ pela regra $f(y) = g(p^{-1}(y))$ e
   (a) **Propriedade universal da topologia quociente:** f é contínua sse g é contínua.
   (b) f é uma aplicação quociente sse g é uma aplicação quociente.

   Em palavras: Dar uma aplicação contínua a partir de um espaço quociente $X/\sim$ é a mesma coisa que dar uma aplicação contínua a partir de X que é constante nas classes de equivalência.

(11) Seja $g : X \to Z$ uma aplicação sobrejectiva e contínua, $\sim$ a relação de equivalência em X determinada pela partição de X

$$\coprod g^{-1}(z).$$

e X^* o espaço quociente por esta relação de equivalência. Então

(a) g determina uma aplicação bijectiva $f : X^* \to Z$ que é um homeomorfismo sse g é uma aplicação quociente.

(b) Se Z é Hausdorff então X^* também é.

(12) Seja X um conjunto, $\{X_\alpha\}$ uma família de espaços topológicos e $g_\alpha : X \to X_\alpha$ funções. Chama-se **topologia inicial** em X á menos fina das topologias em X que torna as aplicações g_α contínuas.

(13) A topologia inicial em X é a topologia com subbase

$$\cup_\alpha \{g_\alpha^{-1}(U) : U \subset X_\alpha \text{ aberto }\}.$$

(14) Se X tem a topologia inicial então $f : A \to X$ é contínua sse $g_\alpha \circ f$ é contínua para todo o α.

(15) A topologia produto em $\prod_\alpha X_\alpha$ é a topologia inicial determinada pelas projecções.

(16) Seja X um conjunto, $\{X_\alpha\}$ uma família de espaços e $g_\alpha : X_\alpha \to X$ funções. Chama-se **topologia final** em X á mais fina das topologias que torna todas as aplicações g_α contínuas.

(17) A topologia final em X é $\mathcal{T} = \{U \subset X : g_\alpha^{-1}(U) \subset X_\alpha \text{é aberto}\}$.

(18) Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua para a topologia inicial em X sse $f \circ g_\alpha$ é contínua para todo o α.

(19) A topologia quociente determinada por uma função sobrejectiva $p : X \to B$ é a topologia final determinada por p.

(20) Se $X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ são espaços topológicos, podemos dar a $X = \cup_n X_n$ a topologia final determinada pelas inclusões $X_n \to X$. Então $A \subset X$ é aberto sse $A \cap X_n$ é aberto para todo o $n \in N$.

7. Conexidade

(1) Um espaço X diz-se **desconexo** se existem U, V abertos não vazios tais que $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Nesse caso diz-se que $\{U, V\}$ é uma **separação** de X. Um espaço é **conexo** se não é desconexo.

(2) Um espaço X é conexo sse $A \subset X$ aberto e fechado $\implies A = \emptyset$ ou $A = X$.

(3) Um espaço X é conexo sse $f : X \to \{0, 1\}$ contínua $\implies f$ é constante ({0,1} com a topologia discreta).

(4) Se $f : X \to Y$ é contínua e X é conexo então $f(X)$ é conexo.

(5) Seja X um espaço. $Y \subset X$ é desconexo sse existem $A, B \subset X$ tais que $A \cap Y$ e $B \cap Y$ são não vazios, $Y \subset A \cup B$ e $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

(6) **Teorema do valor médio:** Seja Y um conjunto totalmente ordenado com a topologia da ordem, X um espaço conexo e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se $a < b \in f(X)$ e c é tal que $a < c < b$ então $c \in f(X)$.
(7) Se $\{U, V\}$ é uma separação de X e $Y \subset X$ é conexo, então $Y \subset U$ ou $Y \subset V$.
(8) Seja $\{X_\alpha\}$ uma família de subespaços conexos de X. Se para todo o α, β $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ então $\cup_\alpha X_\alpha$ é conexo.
(9) Se $A \subset B \subset \overline{A}$ e A é conexo, então B é conexo.
(10) Se X_α são espaços conexos, então $\prod X_\alpha$ é conexo.
(11) Um conjunto totalmente ordenado diz-se um **contínuo linear** se tem mais de um elemento e
   (i) Todo o subconjunto majorado de L tem supremo,
   (ii) $x < y \in L \Rightarrow \exists z \in L \colon x < z < y$.
(12) Se L é um contínuo linear com a topologia da ordem, $I \subset L$ é conexo sse I é um intervalo de L.
(13) Um **caminho** no espaço topológico X é uma aplicação contínua $\gamma : [a, b] \to X$. com $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que X é **conexo por arcos** se para todo o $x_0, x_1 \in X$ existe um caminho γ em X com $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x_1$.
(14) Se X é conexo por arcos, então X é conexo.
(15) Seja X um espaço topológico. A relação $x \sim y$ sse existe $B \subset X$ conexo com $x, y \in B$ é uma relação de equivalência. As classes de equivalência chamam-se **componentes conexas** de X e designam-se por $[x]$.
(16) As componentes conexas de X são subconjuntos conexos maximais de X e são fechados.
(17) Seja X um espaço topológico. A relação $x \sim_P y$ sse existe um caminho γ em X com $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$ é uma relação de equivalência. As classes de equivalência chamam-se **componentes conexas por arcos** de X e designam-se por $[x]_P$.
(18) As componentes conexas por arcos de X são subconjuntos conexos por arcos maximais de X.
(19) X é **localmente conexo (por arcos) em** $x \in X$ se dada uma vizinhança U de x existe V vizinhança de x conexa (por arcos) com $V \subset U$. X diz-se **localmente conexo (por arcos)** se é localmente conexo (por arcos) em x para todo o $x \in X$.
(20) Dado $x \in X$ tem-se sempre $[x]_P \subset [x]$. Se X é localmente conexo por arcos então $[x]_P = [x]$.
(21) Se X é um espaço, o conjunto das componentes conexas de X designa-se por $\pi_0(X)$. Uma função contínua $f : X \to Y$ determina uma função $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ através da fórmula $\pi_0(f)([x]_p) = [f(x)]_P$. Esta correspondência satisfaz
   - $\pi_0(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}$,
   - $\pi_0(f \circ g) = \pi_0(f) \circ \pi_0(g)$.

(22) Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias, um **functor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste em
  (i) Uma correspondência unívoca $F : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}, \quad X \mapsto F(X)$.
  (ii) Para cada $X, Y \in \mathrm{Ob}\,C$ uma função $F : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y)), \quad f \mapsto F(f)$

  satisfazendo:
  - $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$,
  - $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

(23) $\pi_0 : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$ é um functor entre as categorias dos espaços topológicos e a categoria dos conjuntos.

8. Compacidade

(1) Se X é um conjunto, $Y \subset X$ e $\mathcal{A}$ é uma família de subconjuntos de X, diz-se que $\mathcal{A}$ é uma **cobertura** de Y se $Y \subset \cup_{A \in \mathcal{A}} A$. Diz-se que $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta, fechada, etc. se os elementos de $\mathcal{A}$ são abertos, fechados, etc.

(2) Um subconjunto $Y \subset X$ de um espaço X diz-se **compacto** se toda a cobertura aberta de Y tem uma subcobertura finita.

(3) Se X é compacto e $F \subset X$ é fechado então F é compacto.

(4) Se $f : X \to Y$ é contínua e $K \subset X$ é compacto, então $f(K)$ é compacto.

(5) Se X é Hausdorff, $K \subset X$ é compacto e $x \notin K$ então existem U, V abertos de X tais que $x \in U$, $K \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

(6) Se X é Hausdorff e $K \subset X$ é compacto então K é fechado.

(7) Se $f : X \to Y$ é bijectiva, contínua, X é compacto e Y é Hausdorff então f é um homeomorfismo.

(8) **Lema do tubo:** Se X é um espaço, Y é um espaço compacto e U é um aberto de $X \times Y$ tal que $\{x_0\} \times Y \subset U$ então existe V vizinhança de x_0 tal que $V \times Y \subset U$.

(9) Se $\{X_1, \dots X_n\}$ são espaços compactos então $X_1 \times \cdots \times X_n$ é compacto.

(10) Seja X um conjunto. Uma colecção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tem a **propriedade da intersecção finita** se para toda a subcolecção $\{C_1, \dots, C_n\} \subset \mathcal{C}$ se tem $C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$.

(11) Seja X um subespaço. $Y \subset X$ é compacto sse qualquer colecção $\mathcal{C}$ de fechados de X com a propriedade da intersecção finita satisfaz

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

(12) Seja X um conjunto totalmente ordenado satisfazendo o axioma do supremo, com a topologia da ordem. Então dados $a, b \in X$, o intervalo $[a, b]$ é compacto.

(13) Se X é um espaço métrico, e $K \subset X$ é compacto, então K é limitado e fechado.

(14) **Teorema de Heine-Borel:** Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ com a topologia usual) é compacto sse é limitado para a métrica euclidiana e fechado.
(15) Seja Y um conjunto totalmente ordenado com a topologia da ordem. Se $K \subset Y$ é compacto, então K tem máximo e mínimo.
(16) **Teorema de Weierstrass:** Se X é compacto, Y é um conjunto totalmente ordenado com a topologia da ordem e $f : X \to Y$ é contínua, então existem $a, b \in X$ tais que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo o $x \in X$.
(17) **Teorema de Tychonoff:** Se $\{X_\alpha\}$ é uma família de espaços compactos então $\prod_\alpha X_\alpha$ (com a topologia produto) é compacto.
(18) O conjunto de Cantor é homeomorfo a $\prod_{n=1}^{\infty}\{0, 2\}$.
(19) Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$ um subconjunto não vazio. Define-se a *distância de x a A* por $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \colon y \in A\}$. Define-se o *diâmetro de A* por $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in A\} \in [0, +\infty]$.
(20) Se X é um espaço métrico então $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$ e $x \to d(x, A)$ é uma função contínua em X.
(21) **Lema de Lebesgue:** Se (X, d_X) e (Y, d_Y) são espaços métricos, $f : X \to Y$ é uma função contínua e X é compacto, então dada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X existe $\delta > 0$ tal que todo o subconjunto $B \subset X$ não vazio com diâmetro menor que δ está contido em algum $U \in \mathcal{U}$. δ diz-se um **número de Lebesgue** da cobertura $\mathcal{U}$.
(22) Uma função $f : X \to Y$ entre espaços métricos diz-se **uniformemente contínua** se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$.
(23) **Teorema de Heine-Cantor:** Se X é um espaço métrico compacto e Y é um espaço métrico, toda a função contínua $f : X \to Y$ é uniformemente contínua.
(24) Um espaço X diz-se **sequencialmente compacto** se toda a sucess ao (x_n) em X tem uma subsucessão convergente.
(25) Diz-se que um espaço X tem a **propriedade de Bolzano-Weierstrass** se todo o subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação.
(26) Se X é compacto então X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.
(27) Se X é sequencialmente compacto então X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.
(28) O primeiro ordinal não contável tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass mas não é compacto.
(29) O espaço $\prod_{x \in [0,1]}[0, 1]$ é compacto mas não sequencialmente compacto.
(30) Se X é um espaço metrizável então as seguintes afirmações são equivalentes:
    (i) X é compacto.

(ii) X é sequencialmente compacto.
(iii) X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.

(31) Um espaço X diz-se **localmente compacto em** $x \in X$ se existe um conjunto compacto $K \subset X$ que contém uma vizinhança de x. X diz-se **localmente compacto** se é localmente compacto em cada um dos seus pontos.

(32) Se X é Hausdorff, as seguintes afirmações são equivalentes:
(i) X é localmente compacto em x.
(ii) x tem uma vizinhança V tal que $\overline{V}$ é compacto.
(iii) Dada uma vizinhança U de x, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \subset U$ e $\overline{V}$ é compacto.

(33) Se X é localmente compacto e $F \subset X$ é fechado, então F é localmente compacto.

(34) Se X é localmente compacto e Hausdorff e $A \subset X$ é aberto, então A é localmente compacto e Hausdorff.

(35) Um subconjunto $A \subset X$ é **denso** em X se $\overline{A} = X$.

(36) Uma **compactificação** de um espaço X é um mergulho $h : X \to Y$ tal que Y é compacto e Hausdorff, e $\overline{h(X)} = Y$.

(37) Se X é localmente compacto e $h : X \to Y$ é uma compactificação, h é uma aplicação aberta.

(38) **Compactificação de Alexandroff.** Seja X um espaço localmente compacto, Hausdorff e não compacto. Então existe uma compactificação $i : X \to X^+$ com a seguinte propriedade universal: Para toda a compactificação $h : X \to Y$ existe uma única aplicação $p : Y \to X^+$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "h"] & \\ X^+ & Y \arrow[l, dashed, "\exists! p"] \end{tikzcd}$$

tal que $p \circ h = i$. Além disso, $X^+ \setminus X$ tem um único elemento e p é uma aplicação quociente.

(39) Chama-se a $i : X \to X^+$ a compactificação de Alexandroff de X. Pela propriedade universal esta compactificação é única a menos de um homeomorfismo canónico.

(40) X é um espaço localmente compacto e Hausdorff sse é homeomorfo a um aberto de um espaço compacto e Hausdorff.

9. Axiomas de numerabilidade

(1) Uma **base de vizinhanças de** $x \in X$ é uma família $\mathcal{B}$ de vizinhanças de x tal que para todo a vizinhança U de x existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset U$.

(2) X satisfaz o **primeiro axioma da numerabilidade** se cada ponto de X tem uma base de vizinhanças contável.

(3) X satisfaz o **segundo axioma da numerabilidade** se a topologia de X tem uma base contável.
(4) X diz-se **separável** se existe um subconjunto contável $N \subset X$ denso.
(5) X diz-se **Lindelöf** se toda a cobertura aberta de X tem uma subcobertura contável.
(6) Se X satisfaz o primeiro axioma então
   (a) $x \in \overline{A} \iff \exists x_n \in A\colon x_n \to x$.
   (b) $f : X \to Y$ é contínua sse para toda a sucessão $x_n \to x \in X$, se tem $f(x_n) \to f(x)$.
(7) Um espaço métrico satisfaz o primeiro axioma da numerabilidade. Um espaço métrico separável satisfaz o segundo axioma.
(8) Se X satisfaz o segundo axioma e $D \subset X$ é um conjunto discreto então D é contável.
(9) Se X satisfaz o primeiro (segundo) axioma e $Y \subset X$ então Y satisfaz o primeiro (segundo) axioma.
(10) Se X_n satisfaz o primeiro (segundo) axioma então $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ satisfaz o primeiro (segundo) axioma.
(11) Se X satisfaz o segundo axioma da numerabilidade, então X satisfaz o primeiro, é separável e Lindelöf.
(12) $\mathbb{R}_l = \mathbb{R}$ com a topologia do limite superior satisfaz todos os axiomas de numerabilidade excepto o segundo.
(13) O **plano de Sorgenfrey** $\mathbb{R}_l^2$ não é Lindelöf logo o produto de espaços Lindelöf pode não ser Lindelöf. $[0,1]\times]0,1[$ com a topologia da ordem lexicográfica não é Lindelöf embora $[0,1]\times[0,1]$ seja compacto logo Lindelöf. Portanto subespaços de espaços Lindelöf podem não ser Lindelöf.

10. Redes

(1) Uma ordem parcial $(J,\leq)$ diz-se **filtrante à direita** se $\forall \alpha,\beta \in J$, existe $\gamma \in J$ tal que $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$. Nesse caso diz-se que J é um **conjunto direccionado**. Um subconjunto $K \subset J$ diz-se **cofinal** se para todo o $\alpha \in J$ existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \leq \beta$. É fácil ver que a ordem restrita a K é filtrante à direita.
(2) Uma **rede** em X é uma função $f : J \to X$ onde J é um conjunto direccionado. Em vez de f escreve-se $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ onde $x_\alpha = f(\alpha)$.
(3) Diz-se que uma rede (x_α) **converge para** $x \in X$ se para toda a vizinhança U de x, existe $\alpha \in J$ tal que $\alpha \leq \beta \implies x_\beta \in U$.
(4) Uma **subrede** de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ é a composição de (x_α) com uma função $g : K \to J$ onde K é um conjunto ordenado, $\alpha \leq \beta \Rightarrow g(\alpha) \leq g(\beta)$ e $g(K)$ é cofinal em J.
(5) Sejam X e Y espaços topológicos, $A \subset X$ e $f : X \to Y$ uma função. Então
   (a) $x \in \overline{A}$ sse existe uma rede $(x_\alpha) \in A$ com $x_\alpha \to x$.

(b) $f : X \to Y$ é contínua em x sse para toda a rede (x_α) convergente para x, se tem $f(x_\alpha) \to f(x)$.
(c) X é compacto sse toda a rede em X tem uma subrede convergente.

11. Axiomas de separação

(1) X diz-se **regular** se X é T_1 e para todo o $x \in X$ e $A \subset X$ fechado tal que $x \notin A$, existem abertos U, V disjuntos tais que $x \in U$ e $A \subset V$.
(2) X diz-se **normal** se X é T_1 se para todos os $A, B \subset X$ fechados e disjuntos, existem abertos U, V abertos disjuntos tais que $A \subset U, B \subset V$.
(3) normal $\Rightarrow$ regular $\Rightarrow$ Hausdorff $\Rightarrow$ T_1.
(4) Seja X um espaço T_1. Então
  (a) X é regular sse para todo o $x \in X$ e U vizinhança de x, existe V vizinhança de x com $\overline{V} \subset U$.
  (b) X é normal sse para todo o $A \subset X$ fechado e $U \supset A$ aberto, existe $V \supset A$ aberto com $\overline{V} \subset U$.
(5) Um subespaço de um espaço Hausdorff (regular) é Hausdorff (regular).
(6) Um produto de espaços Hausdorff (regulares) é Hausdorff (regular).
(7) Se X é regular e satisfaz o segundo axioma da numerabilidade então X é normal.
(8) Se X é compacto e Hausdorff então X é normal.
(9) Se X é metrizável então é normal.
(10) Se X é um conjunto totalmente ordenado com a topologia da ordem, então X é normal.
(11) Escrevendo $\overline{S_\Omega} = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ onde S_Ω é o primeiro ordinal não contável, $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ não é normal. É um exemplo de um subespaço de um espaço normal (o compacto Hausdorff $\overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$) que não é normal, de um produto de espaços normais que não é normal e também de um espaço regular (produto de regulares) que não é normal.
(12) **Lema de Urysohn:** Seja X um espaço normal e $A, B \subset X$ fechados disjuntos. Então existe uma função contínua $f : X \to [a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $f(A) = a$ e $f(B) = b$.
(13) O Lema de Urysohn caracteriza os espaços normais entre os espaços T_1 uma vez que se X é um espaço T_1 que satisfaz a conclusão do Lema de Urysohn, X é normal.
(14) **Teorema da extensão de Tietze:** Seja X um espaço normal, $A \subset X$ um subconjunto fechado e $f : A \to [a, b]$ uma função

contínua. Então existe $g : X \to [a,b]$ contínua tal que $g_{|A} = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, dashed, "\exists g"'] & {[a,b]} \end{tikzcd}$$

(15) A conclusão do teorema de Tietze permanece válida substituindo $[a,b]$ por $\mathbb{R}$.

(16) O teorema de Tietze implica o Lema de Urysohn, e portanto a conclusão do teorema de Tietze é mais uma caracterização dos espaços normais entre aqueles que são T_1.

(17) Seja A, B subconjuntos de um espaço X. Diz-se que A, B podem ser **separados por uma função contínua** se existe $f : X \to [0,1]$ contínua com $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$. Um espaço X diz-se **completamente regular** se X é T_1 e para cada $A \subset X$ fechado e $x \notin A$, os conjuntos $\{x\}$ e A podem ser separados por uma função contínua.

(18) Normal $\Rightarrow$ Completamente regular $\Rightarrow$ Regular.

(19) Um subespaço de um espaço completamente regular é completamente regular. O produto de espaços completamente regulares é completamente regular.

(20) Seja X um espaço T_1 e $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de funções contínuas $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ tal que para todo o $x \in X$ e $U \subset X$ vizinhança de x, existe α tal que $f_\alpha(x) \neq 0$ e $f_\alpha(U^c) = 0$. Então a função

$$F : X \to \mathbb{R}^J$$

definida por $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$ é um mergulho.

(21) Um espaço é completamente regular sse pode ser mergulhado em $[0,1]^J$ para algum J.

(22) O mergulho anterior pode ser escolhido de forma a ser **natural**. Isto é, se tomarmos

$$J_X = \{f : X \to [0,1] \colon f \text{ é contínua }\}$$

escrevendo $\alpha(X) = [0,1]^{J_X}$, e considerando para cada função contínua $g : X \to Y$, a função $\alpha(g) : [0,1]^{J_X} \to [0,1]^{J_Y}$ definida por $\alpha(g)((x_f)_{f \in J_X}) = (y_h)_{h \in J_Y}$ onde $y_h = x_{h \circ g}$. Então as aplicações $X \to \alpha(X)$ e $g \mapsto \alpha(g)$ definem um functor da categoria dos espaços completamente regulares para a categoria dos espaços completamente regulares. Além disso o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ {[0,1]^{J_X}} \arrow[r, "\alpha(g)"'] & {[0,1]^{J_Y}} \end{tikzcd}$$

O facto de o diagrama anterior comutar significa (por definição) que as aplicações i_X definem uma **transformação natural** entre o functor identidade e o functor α.

(23) **Teorema da metrização de Urysohn:** Todo o espaço regular com uma base contável é metrizável (na realidade pode ser mergulhado em $[0,1]^\omega$).

(24) Uma **variedade topológica de dimensão** m é um espaço Hausdorff X com uma base contável tal que para todo o $x \in X$ tem uma vizinhança homeomorfa a $\mathbb{R}^m$.

(25) O **suporte** de uma função $\phi : X \to \mathbb{R}$ é o conjunto $\mathrm{supp}(\phi) = \overline{\phi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$.

(26) Se $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ é uma cobertura de um espaço X, uma **partição da unidade subordinada a** $\mathcal{U}$ é uma família de funções $\{\phi_i : X \to [0,1] : i = 1, \ldots n\}$ tais que
   (i) $\mathrm{supp}(\phi_i) \subset U_i$,
   (ii) $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$ para todo o $x \in X$.

(27) Se X é um espaço normal e $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ é uma cobertura aberta de X, existe uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$.

(28) **Teorema do mergulho para variedades topológicas compactas:** Se X é uma variedade topológica compacta, existe um mergulho de X em $\mathbb{R}^N$ para algum N.

(29) Existe uma compactificação de um espaço X sse X é completamente regular.

(30) **Compactificação de Stone-Čech:** Seja X um espaço completamente regular.
   (a) Existe uma compactificação $i_X : X \to \beta(X)$ com a seguinte propriedade. Dada qualquer função $h : X \to \mathbb{R}$ limitada, existe uma única função contínua $H : \beta(X) \to \mathbb{R}$ que prolonga h.
   (b) A compactificação anterior é caracterizada pela seguinte propriedade universal: Dada qualquer aplicação contínua $f : X \to Y$ com Y compacto e Hausdorff, existe uma única aplicação $F : \beta(X) \to Y$ que prolonga f.
   (c) Se f é uma compactificação, então F é uma aplicação quociente.
   (d) $\beta(X)$ é única a menos de homeomorfismo e β define um functor da categoria dos espaços completamente regulares para a categoria dos espaços Hausdorff e compactos.

12. Espaços métricos completos

(1) Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sucessão $(x_n) \in X$ diz-se uma **sucessão de Cauchy** se para todo o $\epsilon > 0$ existe N tal que $n, m > N \implies d(x_n, x_m) < \epsilon$.

(2) Toda a sucessão convergente é uma sucessão de Cauchy. Toda a sucessão de Cauchy é limitada.

(3) Um espaço métrico X diz-se **completo** se toda a sucessão de Cauchy converge.
(4) (X,d) é completo sse $(X,\overline{d})$ é completo onde $\overline{d}(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$.
(5) Seja (X,d) um espaço métrico completo. Então $A \subset X$ é completo para a métrica induzida sse A é fechado em X.
(6) Um espaço métrico é completo sse toda a sucessão de Cauchy tem uma subsucessão convergente.
(7) $\mathbb{R}^n$ com qualquer das métricas usuais (a euclideana ou a do máximo) é completo.
(8) $\mathbb{R}^\omega$ com a métrica $D(x,y) = \sup\{\frac{\overline{d}(x_k,y_k)}{k} : k \in \mathbb{N}\}$ (onde $\overline{d}(x,y) = \max\{|x-y|, 1\}$) é completo.
(9) Se (Y,d) é um espaço métrico e J é um conjunto, a **métrica uniforme** em Y^J é a métrica

$$\overline{\rho}(x,y) = \sup\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) \colon \alpha \in J\}.$$

(10) A partir daqui vamos usar a notação funcional para os elementos de Y^J. Por exemplo dados $f, g : J \to Y$ elementos de Y^J, $\overline{\rho}(f,g) = \sup\{\overline{d}(f(\alpha), g(\alpha)) \colon \alpha \in J\}$.
(11) Se (Y,d) é um espaço métrico completo, $(Y^J, \overline{\rho})$ é um espaço métrico completo.
(12) Seja (Y,d) um espaço métrico.
  (a) Dado um conjunto qualquer X, o conjunto $B(X,Y) \subset Y^X$ das funções limitadas de X para Y é um subconjunto fechado de Y^X e portanto é um espaço métrico completo com a métrica uniforme.
  (b) Dado um espaço topológico X, o conjunto $C(X,Y) \subset Y^X$ das funções contínuas de X para Y é um subconjunto fechado de Y^X e portanto é um espaço métrico completo com a métrica uniforme.
(13) Se X é um espaço compacto $C(X,Y) \subset B(X,Y)$
(14) Em $B(X,Y)$ podemos definir a **métrica do supremo** $\rho(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$. A relação entre a métrica do supremo e a métrica uniforme é $\overline{\rho}(f,g) = \min\{\rho(f,g), 1\}$.
(15) Se (X,d) é um espaço métrico, então
  (1) Existe um mergulho isométrico $i : (X,d) \to (Y,d')$ num espaço métrico completo (Y,d').
  (2) Se $\overline{i(X)} = Y$ então o mergulho acima tem a seguinte propriedade universal:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Z \\ Y = \overline{i(X)} \arrow[ur, dashed, "\exists! l"'] & \end{tikzcd}$$

  Dado qualquer mergulho isométrico $j : X \to Z$ num espaço métrico completo Z, j factoriza-se de forma única por i.

Chama-se a um mergulho satisfazendo (2) o **completado de** X (que é único a menos de isometria única pela propriedade universal).

(16) Uma função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é **uniformemente contínua** se para todo o $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x') < \delta \implies d'(f(x), f(x'))$ para todos os $x, x' \in X$.

(17) Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos com Y completo. Se $A \subset X$ e $f : A \to Y$ é uniformemente contínua, então f pode ser prolongada a $\overline{A}$ de forma única, e o prolongamento é uniformemente contínuo.

(18) Se (X, d) é um espaço métrico, uma aplicação $f : X \to X$ diz-se uma **contracção** se existe $\alpha < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ para todos os $x, y \in X$.

(19) **Teorema do ponto fixo:** Seja (X, d) um espaço métrico completo. Uma contracção $f : X \to X$ tem um único ponto fixo. Isto é, existe um único $x \in X$ com $f(x) = x$.

(20) Um espaço topológico diz-se um **espaço de Baire** se dada uma coleção contável de fechados A_n com interior vazio, $\operatorname{int} \cup_n A_n$ é vazio.

(21) Equivalentemente, X é um espaço de Baire sse toda a intersecção contável de abertos densos é densa.

(22) Um espaço compacto e Hausdorff é um espaço de Baire.

(23) **Teorema de Baire:** Um espaço métrico completo é um espaço de Baire.

(24) Um espaço métrico (X, d) diz-se **totalmente limitado** se para todo o $\epsilon > 0$, X admite uma cobertura finita por bolas de raio ϵ.

(25) Um espaço métrico é compacto sse é completo e totalmente limitado.

13. Espaços de funções

(1) Seja (Y, d) um espaço métrico e X um espaço topológico. Uma família $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ de funções diz-se **equicontínua em** $x_0 \in X$ se para todo o $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \epsilon$ para todo o $f \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ diz-se **equicontí nua** se é equicontínua em x para todo o $x \in X$. $\mathcal{F}$ diz-se **limitada pontualmente** se para todo o $x \in X$, $\{f(x) : x \in X\}$ é um conjunto limitado em Y.

(2) Seja X um espaço topológico e (Y, d) um espaço métrico compacto. Considere-se a topologia uniforme em $C(X, Y)$ determinada pela métrica d. Se um subconjunto $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ é totalmente limitado, então $\mathcal{F}$ é equicontínuo.

(3) Seja X um espaço, e (Y,d) um espaço métrico. Se X e Y são compactos e $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ é equicontínuo, então $\mathcal{F}$ é totalmente limitado para a métrica do supremo em $C(X,Y)$ (ou, equivalentemente, para a métrica uniforme em $C(X,Y)$).

(4) **Teorema de Ascoli:** Seja X um espaço compacto. Um subconjunto $\mathcal{F} \subset C(X;\mathbb{R}^n)$ tem fecho compacto na topologia uniforme determinada pela métrica standard em $\mathbb{R}^n$ sse $\mathcal{F}$ é limitada pontualmente e equicontínua.

(5) Seja X um espaço compacto e considere-se a topologia uniforme em $C(X,\mathbb{R}^n)$ determinada pela métrica usual em $\mathbb{R}^n$. Então $\mathcal{F} \subset C(X,\mathbb{R}^n)$ é compacto sse $\mathcal{F}$ é limitado, fechado e equicontínuo.

(6) Sejam X e Y espaços topológicos. Para cada $C \subset X$ compacto e $U \subset Y$ aberto, define-se

$$S(C,U) = \{f \in C(X,Y) \colon f(C) \subset U\}.$$

A topologia em $C(X,Y)$ que tem por subbase os conjuntos $\{S(C,U)\}$ chama-se a **topologia compacta-aberta** em $C(X,Y)$.

(7) Se (Y,d) é um espaço métrico, a topologia compacta-aberta em $C(X,Y)$ tem por base os conjuntos

$$B_C(f,\epsilon) = \{g \in C(X,Y) \colon \max_{x\in C} d(f(x),g(x)) < \epsilon\}$$

com $C \subset X$ compacto e $\epsilon > 0$.

(8) Se (Y,d) é um espaço métrico, e $C(X,Y)$ tem a topologia compacta-aberta, uma sucessão $f_n \in C(X,Y)$ converge para f sse f_n converge para f uniformemente em cada compacto $C \subset X$. Por esta razão, quando (Y,d) é um espaço métrico chama-se também **topologia da convergência uniforme nos compactos** à topologia compacta-aberta.

(9) Sejam X, Y espaços topológicos. Seja $\mathcal{T}_1$ a topologia da convergência pontual (isto é a topologia induzida pela topologia produto em Y^X) em $C(X,Y)$ e $\mathcal{T}_2$ a topologia compacta-aberta. Então $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ com igualdade se X é um espaço discreto.

(10) Se X é um espaço topológico e (Y,d) é um espaço métrico, seja $\mathcal{T}_2$ a topologia compacta-aberta e $\mathcal{T}_3$ a topologia uniforme determinada pela métrica d. Então $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_3$ com igualdade se X é compacto. Em particular, se X é compacto, a topologia uniforme depende apenas da topologia determinada pela métrica d.

(11) Sejam X, Y espaços e considere-se a topologia compacta aberta em $C(X,Y)$. Se X é localmente compacto e Hausdorff, então a **aplicação de avaliação**

$$\mathrm{ev} : X \times C(X,Y) \to Y$$

definida por $\mathrm{ev}(x,f) = f(x)$, é contínua.

(12) **Teorema de Ascoli (versão mais geral):** Seja X um espaço topológico, (Y, d) um espaço métrico, e considere-se a topologia compacta-aberta em $C(X, Y)$.
   (1) Se $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ é equicontínuo, e $\mathcal{F}_a = \{f(a) : f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ tem fecho compacto para todo o $a \in X$, então $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto.
   (2) O recíproco verifica-se desde que X seja localmente compacto e Hausdorff.

(13) Sejam X, Y, Z conjuntos, e $f : X \times Z \to Y$ uma função. A **função adjunta** de f é a função $F : Z \to Y^X$ definida por $(F(z))(x) = f(x, z)$. Reciprocamente, dada uma função $G : Z \to Y^X$, a **função adjunta** de G é a função $g : X \times Z \to Y$ definida por $g(x, z) = (G(z))(x)$.

(14) A correspondência anterior estabelece uma bijecção natural

$$\mathcal{S}et(X \times Z, Y) = \mathcal{S}et(Z, Y^X)$$

onde escrevemos $\mathcal{S}et(A, B)$ para o conjunto das funções de A para B (isto é, o conjunto dos morfismos de A para B na categoria dos conjuntos) para simplificar a notação.

(15) Sejam X, Y espaços e considere-se a topologia compacta-aberta em $C(X, Y)$. Então
   (a) Se $f : X \times Z \to Y$ é contínua, a função adjunta $F : Z \to C(X, Y)$ é contínua.
   (b) Se $G : Z \to C(X, Y)$ é contínua, e X é localmente compacto e Hausdorff então a função adjunta $g : X \times Z \to Y$ é contínua.

Em particular, se X é localmente compacto e Hausdorff, então há uma bijecção natural

$$C(X \times Z, Y) = C(Z, C(X, Y)).$$

14. O Grupo fundamental

(1) Sejam X, Y espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ contínuas. Uma **homotopia entre f e g** é uma aplicação contínua $h : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $h(x, 0) = f(x)$ e $h(x, 1) = g(x)$. Se existe uma homotopia entre f e g diz-se que f e g são **homotópicas**, o que se nota $f \simeq g$. Note que uma homotopia determina um caminho $H : [0, 1] \to C(X, Y)$ com ponto inicial f e ponto final g.

(2) A relação de homotopia em $C(X, Y)$ é uma relação de equivalência. O conjunto das classes de homotopia designa-se por $[X, Y]$.

(3) Se X é localmente compacto e Hausdorff, $[X, Y] = \pi_0(C(X, Y))$ é o conjunto das componentes conexas por arcos de $C(X, Y)$ com a topologia compacta-aberta.

(4) Se $f : X \to Y$ é homotópica a uma aplicação constante, f diz-se **nul-homotópica**.

(5) Se $f, g : [0,1] \to X$ são caminhos em X, com $f(0) = g(0) = x_0$ e $f(1) = g(1) = x_1$, uma **homotopia de caminhos** entre f e g é uma aplicação contínua $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que
$$h(s,0) = f(s)\ ,\ h(s,1) = g(s)\ ,\ h(0,t) = x_0\ ,\ h(1,t) = x_1.$$
(6) Escreve-se $f \simeq_p g$ se existe uma homotopia de caminhos entre f e g.
(7) $\simeq_p$ é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de $f : [0,1] \to X$ designa-se por $[f]$.
(8) Se $f, g : [0,1] \to X$ satisfazem $f(1) = g(0)$ define-se $f \star g : [0,1] \to X$ por
$$f \star g(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$
Chama-se a $f \star g$ o **produto de f por g**. A composição induz uma composição nas classes de homotopia de caminhos, também notada por $*$.
(9) A operação $*$ nas classes de homotopia de caminhos tem as seguintes propriedades:
   (i) **Associatividade:** Se $f, g, h : [0,1] \to X$ satisfazem $f(1) = g(0), g(1) = h(0)$ então $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$.
   (ii) **Identidades:** Designando por $e_x : [0,1] \to X$ o caminho constante igual a $x \in X$, tem-se para $f : [0,1] \to X$ com $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, $[f] * [e_{x_1}] = [e_{x_0}] * [f] = [f]$.
   (iii) **Inversos:** Se $f[0,1] \to X$ é um caminho, define-se o **caminho inverso** $\overline{f} : [0,1] \to X$ por $\overline{f}(s) = f(1-s)$. Então se $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$ tem-se $[f] * [\overline{f}] = [e_{x_1}]$ e $[\overline{f}] * [f] = [e_{x_0}]$.
(10) Um **grupóide** é uma categoria em que todos os morfismos têm inversos à esquerda e à direita. Se X é um espaço topológico, o **grupóide fundamental** de X é o grupóide $\pi(X)$ com objectos os pontos de X e morfismos de x_0 a x_1 as classes de homotopia de caminhos entre x_0 e x_1. A composição é o produto $*$ e a identidade de $x \in X$ é $[e_x]$.
(11) Dado $x_0 \in X$ chama-se a um caminho com ponto inicial e final igual a x_0 um **laço em X baseado no ponto** x_0. O conjunto das classes de homotopia de laços baseados em x_0 com a operação $*$ é um grupo dito o **grupo fundamental de X em** x_0, ou o primeiro grupo de homotopia de X em x_0.
(12) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é convexo, então $\pi(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$ para todo o $x_0 \in X$.
(13) Se $\alpha : [0,1] \to X$ é um caminho com $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$ define-se
$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$
por $\hat{\alpha}([f]) = [\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha]$. $\overline{\alpha}$ é um isomorfismo de grupos.

(14) Em particular se $x_0, x_1 \in X$ pertencem à mesma componente conexa por arcos, então $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$ (mas este isomorfismo **não é canónico** em geral).
(15) Um espaço X diz-se **simplesmente conexo** se X é conexo por arcos e $\pi_1(X, x_0) = 0$ para algum $x_0 \in X$ (ou equivalentemente para todo o $x_0 \in X$).
(16) X é simplesmente conexo sse para todo o $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ com $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$ se tem $\alpha \simeq_p \beta$.
(17) Um **espaço pontuado** é um par (X, x_0) formado por um espaço X e um ponto $x_0 \in X$. Uma aplicação de espaços pontuados $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é uma aplicação contínua $h : X \to Y$ tal que $h(x_0) = y_0$. Os espaços pontuados formam uma categoria da forma óbvia.
(18) Dada $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, define-se

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

por $h_*([f]) = [h \circ f]$. A aplicação h_* está bem definida e determina um homomorfismo de grupos.
(19) A correspondência que a (X, x_0) associa $\pi_1(X, x_0)$ e a $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ associa o homomorfismo h_* é um functor da categoria dos espaços pontuados para a categoria dos grupos.
(20) Uma aplicação $p : E \to B$ diz-se uma **aplicação de revestimento** (e E diz-se um **revestimento** de B) se p é sobrejectiva, contínua e se para todo o $b \in B$ existe uma vizinhança U de b em B tal que $p^{-1}(U) = \coprod_\alpha V_\alpha$ com V_α abertos de E e $p_{|V_\alpha} : V_\alpha \to U$ um homeomorfismo. Dizemos que uma vizinhança U satisfazendo as condições acima é uma **vizinhança trivializante**.
(21) Se $p : E \to B$ é uma aplicação de revestimento, $p^{-1}(b) \subset E$ é um subespaço discreto para todo o $b \in B$.
(22) Uma aplicação de revestimento $p : E \to B$ é um homeomorfismo local (isto é, cada ponto de E tem uma vizinhança que é levada homeomorficamente num aberto de B) e portanto é uma aplicação aberta.
(23) Se $p : E \to B$ é uma aplicação de revestimento e $B_0 \subset B$ então $p_{|B_0} : p^{-1}(B_0) \to B_0$ é uma aplicação de revestimento.
(24) Se $p_i : E_i \to B_i$ são aplicações de revestimento para $i = 1, 2$, então $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ é uma aplicação de revestimento.
(25) Seja $p : E \to B$ uma aplicação de revestimento e $f : Y \to B$ uma aplicação contínua. Um **levantamento de** f é uma

aplicação $\tilde{f} : Y \to E$ contínua tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

(26) **Propriedade do levantamento único de caminhos:** Seja $p : E \to B$ uma aplicação de revestimento, $b_0 \in B$ e $e_0 \in p^{-1}(b)$. Então dado $f : [0,1] \to B$ um caminho em B com $f(0) = b_0$ existe um único levantamento $\tilde{f} : [0,1] \to E$ com $\tilde{f}(0) = e_0$.

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

(27) **Propriedade do levantamento único de homotopias:** Seja $p : E \to B$ uma aplicação de revestimento, $\tilde{f} : Y \to E$ uma aplicação contínua, e $F : Y \times [0,1] \to B$ uma homotopia com $F(y,0) = p \circ \tilde{f}(y)$. Então existe um único levantamento $\tilde{F} : Y \times [0,1] \to E$ de F.

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times [0,1] \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

(28) Note que a propriedade do levantamento único de caminhos corresponde ao caso particular da propriedade do levantamento único de homotopias em que Y é um ponto.

(29) Se $p : E \to B$ é uma aplicação de revestimento e $f, g : [0,1] \to B$ são homotópicos por caminhos, dois levantamentos $\tilde{f}, \tilde{g} : [0,1] \to E$ com o mesmo ponto inicial são homotópicos por caminhos, e em particular têm o mesmo ponto final.

(30) Dada uma aplicação de revestimento $p : E \to B$, $b_0 \in B$ e $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, define-se a **aplicação de levantamento determinada por** e_0

$$\phi_{e_0} : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

por $\phi_{e_0}([f]) = \tilde{f}(1)$ onde $\tilde{f}$ é o levantamento de f com início em e_0.

(31) Se E é conexo por arcos, a aplicação de levantamento $\phi_{e_0} : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ é sobrejectiva.

(32) Se E é simplesmente conexo, a aplicação de levantamento $\phi_{e_0} : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ é bijectiva.

(33) Considere-se o revestimento $p : \mathbb{R} \to S^1$ definido por $p(x) = e^{2\pi i x}$. A aplicação de levantamento

$$\phi_0 : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z} = p^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$$

é um isomorfismo de grupos.

(34) Um representante de um gerador de $\pi_1(S^1, 1)$ é $g(t) = e^{2\pi i t}$.

(35) Se $A \subset X$, uma aplicação contínua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para $a \in A$ diz-se uma **retracção** e diz-se que A é um **retrato** de X.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

(36) S^1 não é um retrato de $B^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

(37) **Teorema do ponto fixo de Brouwer para o disco:** Se $f : B^2 \to B^2$ é uma aplicação contínua, então f tem um ponto fixo.

(38) Seja $h : S^1 \to X$ uma aplicação contínua. Então as seguintes afirmações são equivalentes:
   (i) h é nul-homotópica,
   (ii) h admite um prolongamento contínuo a B^2,
   (iii) $h_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(X, h(1))$ é o homomorfismo trivial.

(39) A esfera de dimensão n é o espaço $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$. O ponto $-x$ diz-se o **antípoda de** x. Diz-se que uma aplicação $h : S^n \to S^m$ preserva antípodas se $h(-x) = -h(x)$ para todo o $x \in S^n$.

(40) Se $h : S^1 \to S^1$ é contínua e preserva antípodas, então h não é nul-homotópica.

(41) Não existe uma aplicação contínua $h : S^2 \to S^1$ que preserve antípodas.

(42) **Teorema de Borsuk-Ulam em dimensão 2:** Se $h : S^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação contínua, então existe $x \in S^2$ tal que $h(x) = h(-x)$.

(43) Dada uma família de espaços pontuados $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in J}$, há um isomorfismo natural

$$\pi_1\left(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha, (x_\alpha)_{\alpha \in J}\right) = \prod_{\alpha \in J} \pi_1(X_\alpha, x_\alpha).$$

onde o produto à esquerda (o produto na categoria dos grupos) é o produto cartesiano de conjuntos com a operação de grupo definida componente a componente.

(44) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$ é simplesmente conexo para $n > 1$.

(45) O **espaço projectivo real** $\mathbb{R}P^n$ é o espaço quociente $S^n/\sim$ onde $\sim$ é a relação de equivalência gerada por $x \sim -x$.

(46) A aplicação $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ é uma aplicação de revestimento.

(47) $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [x]) = \mathbb{Z}/2$

(48) Seja $H : X \times [0,1] \to Y$ uma homotopia com $H(x,0) = h(x)$ e $H(x,1) = k(x)$. Seja $x_0 \in X$ e $\alpha(t) = H(x_0,t)$. Então o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \pi_1(x,x_0) \arrow[r, "h_*"] \arrow[dr, "k_*"'] & \pi_1(Y,h(x_0)) \arrow[d, "\hat{\alpha}"] \\ & \pi_1(Y,k(x_0)) \end{tikzcd} .$$

Em particular

(i) Se h é nul-homotópica então $h_* = 0$.

(ii) Se h_* é um monomorfimo (epimorfismo), o mesmo se passa com k_*.

(iii) Se a homotopia H preserva o ponto de base[2], (isto é, se $H(x_0,t) = h(x_0)$ para todo o t) então $h_* = k_*$.

(49) Em particular, se definirmos a categoria de homotopia pontuada $\mathcal{H}o_*$ com objectos os espaços pontuados e morfismos entre (X,x_0) e (Y,y_0) as classes de homotopia pontuadas de aplicações, π_1 define um functor $\mathcal{H}o_* \to \mathcal{G}r$ (onde $\mathcal{G}r$ designa a categoria dos grupos).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}op_* \arrow[r] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \mathcal{H}o_* \arrow[d, dashed, "\pi_1"] \\ & \mathcal{G}r \end{tikzcd}$$

(50) Uma aplicação $f : X \to Y$ diz-se uma **equivalência de homotopia** se existe uma aplicação $g : Y \to X$ tal que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ e $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. g diz-se então uma **inversa de homotopia de** f e diz-se que X e Y têm o mesmo **tipo de homotopia**. Note que outra maneira de dizer que f é uma equivalência de homotopia, é dizer que $[f]$ é um isomorfimo na categoria de homotopia $\mathcal{H}o$ que tem por objectos os espaços topológicos e por morfismos as classes de homotopia de aplicações.

(51) Se $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, então

$$f_* \colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$$

é um isomorfismo.

(52) $A \subset X$ diz-se um **retrato por deformação de** X se existe $H : X \times [0,1] \to X$ contínua tal que $H(x,0) = x; H(a,t) = a$ para todo o $t \in [0,1]; H(x,1) \in A$. Diz-se que H é uma **retracção por deformação**.

(53) Se $H : X \times [0,1] \to X$ é uma retracção por deformação, a inclusão $i : A \to X$ e $r : X \to A$ definida por $r(x) = H(x,1)$ são inversos de homotopia (note-se que r é uma retracção).

[2]Caso em que H se diz uma homotopia pontuada.

15. O teorema de Seifert-Van Kampen

(1) Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família de grupos. Diz-se que um grupo G juntamente com homomorfismos de grupos $i_\alpha : G_\alpha \to G$ é o **coproduto**, ou **produto livre** da família $\{G_\alpha\}$ se dados homomorfismos $h_\alpha : G_\alpha \to H$ existe um único homomorfismo $h : G \to H$ tal que $h \circ i_\alpha = h_\alpha$.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[d, "i_\alpha"'] \arrow[dr, "h_\alpha"] & \\ G \arrow[r, dashed, "\exists! h"'] & H \end{tikzcd}$$

Usa-se a notação $\coprod_{\alpha\in J} G_\alpha$ ou $\star_{\alpha\in J} G_\alpha$ para o coproduto.

(2) Uma construção do coproduto é $G = W/\sim$ onde W é o conjunto das palavras com letras na união disjunta $\cup_{\alpha\in J} G_\alpha$ e $\sim$ é a relação de equivalência gerada por
   (i) $g_1 \dots g_i \dots g_n \sim g_1 \dots \hat{g}_i \dots g_n$ se g_i é a identidade de algum G_α
   (ii) $g_1 \dots g_i g_{i+1} \dots g_n \sim g_1 \dots (g_i g_{i+1}) \dots g_n$ se g_i e g_{i+1} pertencem ambos a G_α.

   Os homomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \to G$ levam $g \in G_\alpha$ na classe de equivalência da palavra g.

(3) Designa-se por $< a >= \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ o grupo cíclico infinito gerado por a.

(4) O **grupo livre** gerado por um conjunto $\{a_\alpha\}$ é o produto livre $\coprod_{\alpha\in J} < a_\alpha >$.

(5) Se $\{g_\alpha\} \subset G$ é um conjunto de geradores para o grupo G, o homomorfismo canónico $\coprod_\alpha < g_\alpha > \to G$ é sobrejectivo. O núcleo $N \lhd \coprod_\alpha < g_\alpha >$ diz-se o **subgrupo das relações** entre os geradores $\{g_\alpha\}$.

(6) Uma **apresentação** de um grupo G consiste num conjunto de geradores $\{a_\alpha\}$ e um conjunto $\{r_\beta\} \subset \coprod_\alpha < a_\alpha >$ tal que o subgrupo normal de $\coprod_\alpha < a_\alpha >$ gerado por $\{r_\beta\}$ é o núcleo do homomorfismo canónico $\coprod_\alpha < a_\alpha > \to G$. Escreve-se

$$< a_\alpha \mid r_\beta >$$

   para o grupo gerado pelos $\{a_\alpha\}$ com relações $\{r_\beta\}$.

(7) **Exemplos:**
   (a) $< a \mid \quad > \simeq \mathbb{Z}$
   (b) $< a \mid a^n > \simeq \mathbb{Z}/n$
   (c) $< a, b \mid aba^{-1}b^{-1} > \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
   (d) $< \sigma, \tau \mid \sigma^3, \tau^2, \tau\sigma\tau\sigma > \simeq \Sigma_3$ com $\tau \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ e $\sigma \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

(8) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um **diagrama de pushout** em $\mathcal{C}$ é um diagrama da forma

(1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & G \\ H & \end{tikzcd}$$

ou seja, é um triplo A, G, H de objectos de $\mathcal{C}$ e um par de morfismos $i_1 \in \mathcal{C}(A, G)$ e $i_2 \in \mathcal{C}(A, H)$. Um **morfismo a partir do diagrama** (1) (também dito um **cone a partir do diagrama** (1)) consiste num par de morfismos $h_1 \in \mathcal{C}(G, Q), h_2 \in \mathcal{C}(H, Q)$ tal que $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$, ou seja tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & G \arrow[d, "h_1"] \\ H \arrow[r, "h_2"] & Q \end{tikzcd}$$

Um **pushout** é um cone (P, j_1, j_2) a partir do diagrama (1) com a seguinte propriedade universal: dado qualquer outro cone (Q, h_1, h_2), existe um único morfismo $h \in \mathcal{C}(P, Q)$ tal que $h \circ j_1 = h_1$ e $h \circ j_2 = h_2$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & G \arrow[d, "j_1"] \arrow[ddr, "h_1"] & \\ H \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, "h_2"'] & P \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & Q \end{tikzcd}$$

Claro que, pela propriedade universal, quando o pushout existe ele é único a menos de isomorfismo único.

(9) Na categoria dos grupos o pushout de (1) é $P = (G \coprod H)/N$ onde N é o subgrupo normal de $G \coprod H$ gerado por

$$\{i_1(a) i_2(a)^{-1} : a \in A\}$$

juntamente com os morfismos $j_1 : G \to (G \coprod H)/N$ definido pela composição do homomorfismo quociente com o homomorfismo canónico $G \to G \coprod H \to (G \coprod H)/N$, e $j_2 : H \to (G \coprod H)/N$ definido da mesma forma.

(10) **Exemplos:**
   (a) Se $A = \{0\}$ o pushout é o coproduto $G \coprod H$.
   (b) Se $G = \{0\}$, o pushout é H/N onde N é o subgrupo normal gerado pela imagem de i_2 em H.

(c) O pushout de

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "2"] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

é o grupo com apresentação $< a, b \mid a^2b^{-3} >$.

(11) **Teorema de Seifert-Van Kampen :** Seja X um espaço topológico, $U, V \subset X$ abertos e $x_0 \in U \cap V$. Suponhamos que U, V e $U \cap V$ são conexos por arcos, e considere-se o diagrama de inclusões:

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & U \arrow[d, "j_1"] \\ V \arrow[r, "j_2"'] & X \end{tikzcd}$$

Então o seguinte cone é um pushout

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[r, "i_{1*}"] \arrow[d, "i_{2*}"] & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "j_{1*}"] \\ \pi_1(V, x_0) \arrow[r, "j_{2*}"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

16. Classificação de revestimentos

(1) Sejam $p : E \to B$ e $p' : E' \to B$ aplicações de revestimento. $h : E \to E'$ diz-se uma **equivalência de revestimento** se h é um homeomorfismo tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

(2) **Teorema do levantamento:** Seja $p : E \to B$ uma aplicação de revestimento, $b_0 \in B, e_0 \in p^{-1}(B)$, Y um espaço conexo por arcos e localmente conexo por arcos, $f : Y \to B$ uma aplicação com $f(y_0) = b_0$. Então existe um levantamento $\tilde{f} : Y \to E$ com $\tilde{f}(y_0) = e_0$ sse $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.

$$\begin{tikzcd} y_0 \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

e nesse caso o levantamento é único.

(3) Note-se que a propriedade do levantamento único das homotopias é um caso particular do teorema do levantamento (no caso em que Y é um espaço localmente conexo por arcos).

(4) Se $p : E \to B$ é uma aplicação de revestimento, então $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ é injectiva. Logo outra maneira de enunciar o teorema de levantamento é dizer que nas condições do teorema, o problema topológico de existência do levantamento tem solução sse tem solução o problema algébrico da existência de um homomorfismo ϕ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(E, e_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\phi"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(B, b_0) \end{tikzcd}$$

comute.

(5) Se G é um grupo, dois subgrupos H_1, H_2 de G dizem-se **conjugados** se existe $g \in G$ tal que $gH_1g^{-1} = H_2$. A relação de conjugação é uma relação de equivalência no conjunto dos subgrupos de G.

(6) Se $p : E \to B$ é uma aplicação de revestimento com E conexo por arcos, dado $b_0 \in B$, o conjunto

$$\left\{ p_*(\pi_1(E, e)) : e \in p^{-1}(b_0) \right\}$$

é uma classe de conjugação de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$.

(7) **A partir de agora todos os espaços são supostos conexos por arcos e localmente conexos por arcos.**

(8) Sejam $p : E \to B$ e $p' : E' \to B$ aplicações de revestimento. E e E' são equivalentes sse $e_0 \in E, \quad e'_0 \in E'$ e $p(e_0) = p(e'_0) = b_0 \implies p_*(\pi_1(E, e_0))$ e $p_*(\pi_1(E', e'_0))$ são subgrupos conjugados de $\pi_1(B, b_0)$.

(9) Um revestimento $p : E \to B$ diz-se o **revestimento universal** se E é simplesmente conexo (pelo resultado anterior E é único a menos de equivalência).

(10) Se $p : E \to B$ é o revestimento universal e $r : Y \to B$ é outro revestimento (com Y conexo por arcos), então dados $e_0 \in E$ e $y_0 \in Y$ com $p(e_0) = r(y_0)$, existe uma única aplicação de revestimento $q : E \to Y$ tal que $p = r \circ q$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "p"] & \\ & Y \arrow[dl, "r"] \\ B & \end{tikzcd}$$

(11) Um espaço B diz-se **semi-localmente simplesmente conexo** se para todo o $b \in B$ existe uma vizinhança U de b tal que o homomorfismo $i_* : \pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ induzido pela inclusão é o homomorfismo trivial.

(12) Se B tem um revestimento universal, então B é semi-localmente simplesmente conexo.

(13) O espaço $\cup_{n=1}^{\infty}\{(x, y) : (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\} \subset \mathbb{R}^2$ não é semi-localmente simplesmente conexo.

(14) Se $p : E \to B$ é um revestimento e $\alpha, \beta : [0, 1] \to B$ são caminhos com $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$, então os levantamentos $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ a partir de um ponto $e_0 \in E$ terminam no mesmo ponto sse $[\alpha * \overline{\beta}] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$.

(15) Seja B semi-localmente simplesmente conexo, $b_0 \in B$ e H um subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$. Então existe um revestimento $p : E \to B$ e um ponto $e_0 \in E$ tal que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$.

(16) Uma construção de E no ponto anterior (que é único a menos de isomorfismo) é tomar $E = \mathcal{P}/\sim$ onde $\mathcal{P}$ é o conjunto dos caminhos $\alpha : [0, 1] \to B$ com $\alpha(0) = b_0$, $\sim$ é a relação de equivalência definida por $\alpha \sim \beta \iff [\alpha * \overline{\beta}] \in H$. Escrevendo $\alpha^\sharp$ para a classe de equivalência de α em $\mathcal{P}$, $p : E \to B$ é definida por $p(\alpha^\sharp) = \alpha(1)$ e $e_0 = e_{b_0}^\sharp$.

A topologia em E é a topologia quociente pela relação $\sim$ da topologia compacta-aberta em $\mathcal{P}$. Uma base para a topologia é dada pelos conjuntos $B(U, \alpha)$ com $\alpha \in \mathcal{P}$ e U uma vizinhança de $\alpha(1)$ conexa por arcos onde

$$B(U, \alpha) = \{(\alpha * \delta)^\sharp \mid \delta : [0, 1] \to U \text{ com } \delta(0) = \alpha(1)\}.$$

(17) **Teorema de classificação de revestimentos:** Se B é um espaço semi-localmente simplesmente conexo, as classes de equivalência de revestimentos de B estão em correspondência biunívoca com as classes de conjugação de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$ onde b_0 é um ponto da base.