NOÇÕES BÁSICAS DE CATEGORIAS

GUSTAVO GRANJA

1. Introdução

Estas notas destinam-se a introduzir alguns conceitos básicos de categorias que serão usados ou referidos na cadeira de Topologia Geral e Introdução à Análise Funcional.

2. Definição de categoria

Definição 2.1. *Uma* categoria $\mathcal{C}$ *consiste em*

- *Uma família de* objectos $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$*,*
- *Para cada par de objectos* $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *um conjunto de* morfismos *(ou* flechas*)* $\mathcal{C}(X,Y)$*,*
- *Para cada objecto* $X \in \mathcal{C}$*, um morfismo* identidade $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X,X)$*,*
- *Para cada triplo de objectos* $X, Y, Z \in \mathcal{C}$*, uma lei de composição*
$$\mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Z)$$
usualmente denotada $(f,g) \mapsto g \circ f$*.*

satisfazendo os dois axiomas

(i) Para todo o $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ *e* $g \in \mathcal{C}(Z,X)$*,* $f \circ \mathrm{id}_X = f$ *e* $\mathrm{id}_X \circ g = g$*.*
(ii) Para todos os $f \in \mathcal{C}(X,Y), g \in \mathcal{C}(Y,Z)$*,e* $h \in \mathcal{C}(Z,W)$*,* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*.*

Nota 2.2. É usual denotar o conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ dos morfismos entre dois objectos de uma categoria $\mathcal{C}$ também por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ou mesmo $\mathrm{Hom}(X,Y)$ quando a categoria está subentendida. É ainda costume usar a notação $f : X \to Y$ para denotar um morfismo $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.

Exemplo 2.3. (1) A categoria dos conjuntos $\mathcal{S}et$. Os objectos são os conjuntos, e os morfismos são as funções com a identidade e composição usuais.
(2) A categoria dos espaços topológicos $\mathcal{T}op$. Os objectos são os espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas (novamente com a composição e identidades usuais.)
(3) A categoria dos corpos $\mathcal{F}$. Os objectos são os corpos, e os morfismos são os homomorfismos de corpos (que preservam as identidades e são portanto necessáriamente inclusões).
(4) Dado um espaço topológico X podemos definir a categoria $\mathcal{C}_X$ cujos objectos são os abertos de X e tal que
$$\mathcal{C}_X(U,V) = \begin{cases} \{U \hookrightarrow V\} & \text{se } U \subset V \\ \varnothing & \text{se } U \not\subset V \end{cases}$$
com a composição e identidades definidas da forma óbvia.

Date: 13th May 2004.

(5) Dado um grupo (ou mesmo um monóide) G podemos formar uma categoria $\mathcal{C}_G$ com um único objecto $*$ e cujo conjunto dos morfismos $\mathcal{C}_G(*,*) = G$ com a lei de composição do grupo G.

Observação 2.4. Na definição de categoria, os objectos podem não formar um conjunto. Quando a família dos objectos forma um conjunto diz-se que a categoria em questão é *pequena.* Nos exemplos acima, as duas últimas categorias são pequenas, enquanto que as três primeiras não o são.

3. Produtos e coprodutos

Definição 3.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ um conjunto de objectos de $\mathcal{C}$. Um* produto *dos objectos X_α consiste num objecto P de $\mathcal{C}$ e num conjunto de morfismos $\pi_\alpha : P \to X_\alpha$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: Dado um objecto A de $\mathcal{C}$ e morfismos $f_\alpha : A \to X_\alpha$, existe um único morfismo $f : A \to P$ tal que $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$.*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
A \arrow[ur, dashed, "\exists!\ f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha
\end{tikzcd}$$

A maneira de interpretar a definição anterior é a seguinte: Um produto é um objecto P da categoria tal que dar um morfismo para P é equivalente a dar um morfismo para cada um dos factores $\mathcal{X}_\alpha$.

Nota 3.2. Apesar de um produto consistir num objecto juntamente com o conjunto das projecções, é usual referirmo-nos ao objecto como sendo o produto, ficando as projecções subentendidas. O mesmo comentário vale para as noções de coproduto, limite e colimite que serão definidas em seguida.

Lemma 3.3. *Se $(P, \pi_\alpha : P \to X_\alpha)$ e $(P', \pi'_\alpha . P' \to X_\alpha)$ são dois produtos da famí lia de objectos $\{X_\alpha\}$, existe um único isomorfismo $\phi : P \to P'$ tal que $\pi'_\alpha \circ \phi = \pi_\alpha$.*

Proof. A propriedade universal do produto P dá-nos um morfismo único $\phi : P \to P'$ tal que $\pi'_\alpha \circ \phi = \pi_\alpha$, e a propriedade universal do produto P' dá-nos um morfismo $\phi' : P' \to P$ tal que $\pi_\alpha \circ \phi = \pi'_\alpha$. Então $\pi_\alpha \circ (\phi' \circ \phi) = \pi_\alpha$ e pela condição de unicidade na propriedade universal conclui-se que $\phi' \circ \phi = \mathrm{id}_P$. Da mesma forma vemos que $\phi \circ \phi' = \mathrm{id}_{P'}$ o que conclui a demonstração. □

O lema anterior diz que o produto quando existe é único a menos de isomorfismo único. É usual escrever

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$$

para o produto da família $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$, deixando as projecções subentendidas.

Exemplo 3.4. (1) Na categoria dos conjuntos o produto é o produto cartesiano usual com as projecções usuais.
(2) Na categoria dos espaços topológicos, o produto é o produto cartesiano com a topologia produto e as projecções usuais.
(3) Na categoria $\mathcal{C}_X$ com X um espaço topol]ogico, o produto de dois objectos U,V é a intersecção $U \cap V$, com as projecções $U \cap V \hookrightarrow U$ e $U \cap V \hookrightarrow V$. Mais geralmente, o produto de um conjunto de abertos $\{U_\alpha\}$ é $\mathrm{int} \cap_\alpha U_\alpha$.

(4) Na categoria dos corpos não existe o produto dos corpos primos $\mathbb{F}_p$ e $\mathbb{F}_q$ onde p e q são primos distintos. Com efeito, nenhum corpo pode ser incluído simultaneamente em $\mathbb{F}_p$ e $\mathbb{F}_q$ uma vez que estes corpos têm características diferentes.

O produto de uma família vazia de objectos chama-se (quando existe) o *objecto final* da categoria $\mathcal{C}$. Este objecto F é caracterizado a menos de isomorfismo único pelo facto de $\mathcal{C}(X, F)$ ser um conjunto singular para todos os objectos X de $\mathcal{C}$.

$$X \overset{\exists!}{\dashrightarrow} F$$

Na categoria dos conjuntos, ou dos espaços topológicos, o objecto final é um conjunto com um único elemento (com a única topologia possível). Na categoria $\mathcal{C}_X$ acima, o objecto final é o aberto X. Na categoria dos corpos não existe objecto final.

Trocando o sentido de todas as flechas na definição de produto obtemos a noção de coproduto:

Definição 3.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ um conjunto de objectos de $\mathcal{C}$. Um* coproduto *dos objectos X_α consiste num objecto C de $\mathcal{C}$ e num conjunto de morfismos $i_\alpha : X_\alpha \to C$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: Dado um objecto Y de $\mathcal{C}$ e morfismos $j_\alpha : X_\alpha \to Y$, existe um único morfismo $j : C \to Y$ tal que $j \circ i_\alpha = j_\alpha$.*

$$\begin{tikzcd} & Y \\ X_\alpha \arrow[ur, "j_\alpha"] \arrow[r, "i_\alpha"'] & C \arrow[u, dashed, "\exists!\ j"'] \end{tikzcd}$$

A maneira de interpretar a definição anterior é a seguinte: Um coproduto é um objecto C da categoria tal que dar um morfismo a partir de C é equivalente a dar um morfismo a partir de cada um dos objectos X_α.

Tal como o produto, o coproduto quando existe é único a menos de um isomorfismo único que preserva os morfismos estruturais $X_\alpha \to C$. Usa-se a notação

$$\coprod_\alpha X_\alpha$$

para o coproduto dos objectos X_α. O coproduto da família vazia chama-se o *objecto inicial.*

Exemplo 3.6. (1) Na categoria dos conjuntos, o coproduto é a união disjunta com as inclusões $X_\beta \hookrightarrow \coprod_\alpha X_\alpha$.
(2) Em $\mathcal{T}op$,, o coproduto é a união disjunta com a topologia final determinada pelas inclusões $X_\beta \hookrightarrow \coprod_\alpha X_\alpha$.
(3) Na categoria $\mathcal{C}_X$ acima, o coproduto de um conjunto de abertos é a sua união.
(4) Em $\mathcal{S}et$ e $\mathcal{T}op$ o objecto inicial é o conjunto vazio.

4. Limites e colimites de diagramas

Produtos e coprodutos são exemplos respectivamente de limites e colimites de diagramas. Um diagrama numa categoria consiste num conjunto de objectos e de morfismos em $\mathcal{C}$ satisfazendo possívelmente algumas relações. Para definir formalmente diagrama, convem introduzir a noção de functor, que é a noção de morfismo entre categorias.

Definição 4.1. *Um* functor *entre duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ consiste numa regra que associa a cada objecto X de $\mathcal{C}$ um objecto $F(X)$ de $\mathcal{D}$, e a cada par de objectos $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ uma função*

$$\mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y))$$

denotada por $f \mapsto F(f)$ satisfazendo os seguintes axiomas

- $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

Um diagrama *numa categoria $\mathcal{C}$ é um functor $F : I \to \mathcal{C}$ onde I é uma categoria pequena. Diz-se que o diagrama é indexado pela categoria I.*

Exemplo 4.2. (1) Se I é uma categoria com apenas três objectos $\{0, 1, 2\}$ e com apenas dois morfismos $0 \to 2,\ 1 \to 2$ além das identidades, que pode ser representada gráficamente pelo diagrama (os morfismos identidade podem ficar subentendidos)

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] \\ 1 \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$$

chama-se a um diagrama indexado por I um diagrama de pullback. Quando a categoria que indexa o diagrama é simples (isto é, quando as relações de composição entre os morfismos da categoria índice podem ser representadas fácilmente por relações de comutação entre as setas de um diagrama no plano) podemos dar um diagrama desenhando a sua imagem na categoria $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

onde $X = F(0), Y = F(1), Z = F(2), f = F(0 \to 1)$ e $g = F(1 \to 2)$.

(2) Se $I = \mathcal{C}_G$, a categoria determinada por um grupo G, chama-se a um diagrama indexado por I uma acção do grupo G no objecto $F(*)$ (**Exercício:** Verifique que em $\mathcal{S}et$ esta definição coincide com a usual.)

(3) Se $\mathcal{N}$ é uma categoria com um objecto para cada natural e com

$$\mathcal{N}(n,m) = \begin{cases} \{*\} & \text{se } n \leq m \\ \varnothing & \text{se } n > m \end{cases}$$

podemos representar um diagrama indexado por $\mathcal{N}$ da seguinte forma

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots$$

Definição 4.3. *Um morfismo de um objecto $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ para um diagrama $F : I \to \mathcal{C}$ (também chamado um cone sobre o diagrama) consiste num conjunto de setas*

$\{f_i : X \to F(i) | i \in \mathrm{Ob}(I)\}$ *tal que para todo o morfismo* $\alpha : i \to j$ *se verifica* $f_j = F(\alpha) \circ f_i$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & F(i) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\ & F(j) \end{tikzcd}$$

Um limite *de um diagrama* F *é um morfismo* $\{g_i : L \to F(i)\}$ *de um objecto* L *para o diagrama* F *com a seguinte propriedade universal: Dado um outro morfismo* $\{f_i : X \to F(i)\}$, *existe um único morfismo* $f : X \to L$ *tal que* $f_i = f \circ g_i$.

Assim, um limite é um objecto L tal que dar um morfismo para L é o mesmo que dar um morfismo para o diagrama F. Como habitual, a propriedade universal caracteriza o limite a menos de isomorfismo único. Costuma-se escrever

$$\lim_{i \in I} F(i)$$

para o limite de um diagrama $F : I \to \mathcal{C}$.

Trocando o sentido de todas as flechas, obtemos a noção de *colimite* de um diagrama:

Definição 4.4. *Um morfismo de um diagrama* $F : I \to \mathcal{C}$ *para um objecto* $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *(também chamado um co-cone sobre o diagrama) consiste num conjunto de setas* $\{f_i : F(i) \to Y \mid i \in \mathrm{Ob}(I)\}$ *tal que para todo o morfismo* $\alpha : i \to j$ *se verifica* $f_i = f_j \circ F(\alpha)$.

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & Y \\ F(j) \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

Um colimite *de um diagrama* F *é um morfismo* $\{g_i : F(i) \to C\}$ *do diagrama* F *para o objecto* C *com a seguinte propriedade universal: Dado um outro morfismo* $\{f_i : F(i) \to Y\}$, *existe um único morfismo* $f : C \to Y$ *tal que* $f_i = f \circ g_i$.

A propriedade universal diz que "dar um morfismo a partir do colimite é a mesma coisa que dar um morfismo a partir do diagrama".

Exemplo 4.5. (1) Dado um conjunto J podemos formar uma categoria pequena $\mathcal{J}$ que tem por objectos os elementos de J e por morfismos apenas as identidades. Um diagrama numa categoria $\mathcal{C}$ indexado por $\mathcal{J}$ é apenas uma colecção $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de objectos de $\mathcal{C}$. O limite de um tal diagrama é exactamente o produto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ e o colimite é exactamente o coproduto $\coprod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

(2) Considere-se a categoria $\mathcal{S}et$ dos conjuntos e um diagrama de pullback,

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Um morfismo de um conjunto A para este diagrama consiste em três funções $i : A \to X, j : A \to Y$, e $k : A \to Z$ tais que $f \circ i = j$ e $g \circ k = j$. Claramente isto é equivalente a dar um par de aplicações $i : A \to X$ e $k : A \to Z$ tais que $f \circ i = g \circ k$. Dito de outra forma, dar um morfismo para o diagrama é o mesmo que dar uma função

$$A \xrightarrow{(i,k)} \{(x, z) \in X \times Z | f(x) = g(z)\} \subset X \times Z$$

pelo que o limite deste diagrama (também chamado o *pullback* do diagrama) é o conjunto

$$\{(x, z) \in X \times Z | f(x) = g(z)\} \subset X \times Z$$

com as projecções $\pi_1(x, z) = x$ e $\pi_2(x, z) = z$.

(3) O mesmo argumento mostra mais geralmente que, dado um diagrama $F : I \to \mathcal{S}et$, temos

$$\lim_{i \in I} F(i) = \{(x_i) \in \prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} F(i) \colon F(\alpha)(x_i) = x_j \text{ para todo o } \alpha \in \mathrm{Hom}_I(i, j)\}$$

com as projecções $\pi_j : \lim_{i \in I} F(i) \to F(j)$ induzidas pelas do produto cartesiano.

(4) A propriedade universal da topologia inicial diz-nos que o limite de um diagrama em $\mathcal{T}op$ é o limite na categoria $\mathcal{S}et$ com a topologia inicial determinada pelas projecções.

(5) Seja $R \subset X \times X$ uma relação de equivalência no conjunto X e considere-se o diagrama (chamado o *coequalizador* de π_1 e π_2)

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & X \end{tikzcd}$$

Dar um morfismo deste diagrama para um conjunto Y é o mesmo que dar uma função $f : X \to Y$ tal que $f \circ \pi_1 = f \circ \pi_2$, ou seja tal que $f(x_1) = f(x_2)$ se $(x_1, x_2) \in R$. O colimite deste diagrama é portanto o quociente de X pela relação de equivalência R (juntamente com a projecção $X \to X/R$).

Se R é apenas um subconjunto arbitrário de $X \times X$ então o colimite é o quociente pela relação de equivalência determinada por R.

(6) A propriedade universal da topologia quociente diz que em $\mathcal{T}op$, o colimite do diagrama anterior (em que X é um espaço topológico e R tem uma qualquer topologia que torne as projecções contínuas - por exemplo, a topologia discreta) é o quociente X/R com a topologia quociente.

(7) Se

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \cdots$$

é um diagrama em $\mathcal{S}et$ indexado em $\mathcal{N}$ o colimite é simplesmente a união

$$\cup_{n=0}^{\infty} X_i$$

com as inclusões naturais. A propriedade universal da topologia final diz que na categoria dos espaços topológicos, o colimite é a união com a topologia final determinada pelas inclusões.

(8) Mais geralmente, se $F : I \to \mathcal{S}et$ é um diagrama, o colimite é

$$\mathrm{colim}_{i \in I} F(i) = \left(\coprod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} F(i) \right) / \sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência gerada por $x_i \in F(i) \sim F(\alpha)(x_i) \in F(j)$ para todo o $\alpha : i \to j$ e com as aplicações

$$F(j) \to \operatorname{colim}_{i \in I} F(i)$$

obtidas pela composição da inclusão de $F(j)$ na união disjunta e da projecção no quociente.

A propriedade universal da topologia final diz que, em $\mathcal{T}op$, o colimite é o colimite na categoria dos conjuntos com a topologia final determinada pelas aplicações estruturais.

Exercício: Seja $F : \mathcal{C}_G \to \mathcal{S}et$ um diagrama representando uma acção de um grupo G sobre um conjunto $X = F(*)$.

(a) Mostre que o colimite de F é o conjunto das órbitas X/G com a projecção $X \to X/G$.

(b) Mostre que o limite de F é o conjunto dos pontos fixos da acção X^G com a inclusão $X^G \to X$.

5. Transformações naturais

A noção de transformação natural é a noção de morfismo entre functores (e na realidade foi para precisar o que se entende por uma transformação ser "natural" que as categorias foram introduzidas por Eilenberg e MacLane nos anos 40).

Definição 5.1. *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois functores. Uma* transformação natural

$$\eta : F \to G$$

consiste numa correspondência que associa a cada objecto X de $\mathcal{C}$ um morfismo $\eta_X \in \mathcal{D}(F(X), G(X))$ tal que para todo o morfismo $\alpha : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Exemplo 5.2. Se X é um espaço completamente regular, e $J_X = C(X, [0,1])$ é o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \to [0,1]$, podemos definir um mergulho

$$i_X : X \hookrightarrow \prod_{f \in J_X} [0,1]$$

de X num espaço compacto e Hausdorff pela expressão

$$x \mapsto (f(x))_{f \in J_X}.$$

De uma forma imprecisa, é claro que este mergulho é "natural". A maneira de tornar esta ideia precisa é a seguinte. Seja $\mathcal{C}$ a categoria dos espaços completamente regulares, isto é, a categoria cujos objectos são espaços completamente regulares e os morfismos são as aplicações contínuas entre eles.

Primeiro notamos que a atribuição

$$X \mapsto [0,1]^{J_X}$$

determina um functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Basta-nos definir o efeito de F numa função contínua

$$g : X \to Y$$

e podemos fazê-lo definindo $F(g) : [0,1]^{J_X} \to [0,1]^{J_Y}$ por

$$F(g)((x_f)_{f\in J_X}) = (x_{h\circ g})_{h\in J_Y}$$

Isto é, a componente segundo a função $h : Y \to [0,1]$ de $F(g)(x)$ é a componente de x segundo a função $h \circ g : X \to [0,1]$.

É óbvio que $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, e é um exercício simples verificar que $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pelo que F é um functor.

A formulação precisa da noção intuitiva que i_X são mergulhos "naturais" é que a atribuição

$$X \mapsto i_X$$

define uma transformação natural

$$i : \mathrm{id} \to F$$

entre os functores $\mathrm{id} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Temos apenas a verificar que dada uma função contínua $g : X \to Y$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "g"'] & {[0,1]^{J_X}} \arrow[d, "F(g)"] \\ Y \arrow[r, "i_Y"] & {[0,1]^{J_Y}} \end{tikzcd}$$

mas

$$\begin{aligned} F(g) \circ i_X(x) &= F(g)(x_f)_{f\in J_X} \\ &= (x_{g\circ h})_{h\in J_Y} \\ &= (g(x)_h)_{h\in J_Y} \\ &= i_Y(g(x)) \\ &= i_Y \circ g(x). \end{aligned}$$

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal, Fax: (351)218417598

E-mail address: ggranja@math.ist.utl.pt