Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TOPOLOGIA GERAL E INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTAÇÃO

SEGUNDO TESTE E PRIMEIRO EXAME

26 DE JUNHO DE 2004

(2 val.) (1) Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- (i) Um subespaço compacto de X é fechado em X.
- (ii) Um espaço compacto tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.
- (iii) Um espaço metrizável satisfaz o primeiro axioma da numerabilidade.
- (iv) As componentes conexas por arcos de X são fechados.
- (v) Um subespaço de um espaço com base contável tem base contável.
- (vi) $\mathbb{R}^2$ é homeomorfo a $]0,1[\times]0,1[$.
- (vii) Um produto arbitrário de espaços compactos é compacto.
- (viii) Um espaço Hausdorff é regular.
- (ix) Um espaço com base contável é Lindelöf.
- (x) Uma aplicação quociente é uma aplicação fechada.

(1 val.) (2) Enuncie a propriedade universal da topologia quociente.

(1 val.) (3) Seja (Y,d) um espaço métrico e X um espaço. Dado $f \in C(X,Y)$ e $\delta : X \to \mathbb{R}_+$ uma função positiva contínua, define-se

$$B(f,\delta) = \{g\colon d(f(x),g(x)) < \delta(x) \text{ para todo o } x \in X\}.$$

Mostre que os conjuntos $B(f,\delta)$ formam uma base para uma topologia em $C(X,Y)$ (dita a *topologia fina* em $C(X,Y)$) e que se X é compacto esta topologia coincide com a topologia uniforme em $C(X,Y)$.

(1.5 val.) (4) Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $F \subset X$ diz-se *localmente fechado* se cada $x \in F$ tem uma vizinhança V_x em X tal que $V_x \cap F$ é fechado em V_x. Mostre que F é localmente fechado sse F é a intersecção de um aberto com um fechado de X.

(1 val.) (5) Mostre que se $A \subset X$ e $B \subset Y$ são subconjuntos distintos de X e Y respectivamente, e X, Y são conexos, então $X \times Y \setminus (A \times B)$ é conexo.

(1 val.) (6) Seja $f_n : [0,1] \to [0,1]$ uma sucessão de funções qualquer. Explique o que há de errado com o seguinte argumento: Uma vez que $[0,1]^{[0,1]}$ com a topologia produto é compacto (pelo teorema de Tychonoff), existe uma subsucessão de f_n que converge pontualmente em $[0,1]$.

(1.5 val.) (7) Mostre que se $f : X \to Y$ é uma aplicação aberta e X satisfaz o primeiro axioma da numerabilidade, então $f(X)$ também satisfaz o primeiro axioma da numerabilidade.

(1 val.) (8) Mostre que um espaço regular e Lindelöf é normal.

(9) Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas: (2 val.)
  (i) Um produto de espaços completamente regulares é completamente regular.
  (ii) Um subconjunto totalmente limitado de um espaço métrico tem fecho compacto.
  (iii) Um espaço de Baire é um espaço métrico completo.
  (iv) Um espaço regular com base contável é metrizável.
  (v) Qualquer campo vectorial contínuo $\vec{F} : S^2 \to \mathbb{R}^3$ admite um prolongamento contínuo a $\mathbb{R}^3$.
  (vi) A família $\mathcal{F} = \{f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ definida por $f_\alpha(x) = \sin(\alpha x)$ tem fecho compacto em $C([0,1],\mathbb{R})$ para a topologia compacta-aberta.
  (vii) Um espaço contráctil é simplesmente conexo.
  (viii) Se $F \subset \mathbb{R}^3$ é um subconjunto finito então $\mathbb{R}^3 \setminus F$ é simplesmente conexo.
  (ix) Qualquer função contínua $f : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0,1,i\}$ admite um prolongamento contínuo a $\mathbb{C}$.
  (x) Qualquer aplicação $h : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}P^3$ é nul-homotópica.

(10) Enuncie o Teorema de Ascoli. (1 val.)

(11) Mostre que um espaço métrico (X,d) é completo sse para cada sucessão $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados de X com $\operatorname{diam} A_n \to 0$ a intersecção $\cap_n A_n$ é não vazia. (1.5 val.)

(12) Mostre que se Y é regular, então $C(X,Y)$ com a topologia compacta-aberta é regular. *Sugestão: Sendo* $S(C,U) = \{f : X \to Y : f(C) \subset U\}$ *com* C *compacto e* U *aberto, então* $\overline{U} \subset V \Rightarrow \overline{S(C,U)} \subset S(C,V)$. (1.5 val.)

(13) Seja X um espaço topológico, $x \in X$ e $C \subset X$ a componente conexa por arcos de X que contém x. Mostre que a inclusão $i : C \to X$ induz um isomorfismo (1 val.)

$$i_* : \pi_1(C,x) \to \pi_1(X,x)$$

(14) Recorde que $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ e $B^2 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$. Calcule o grupo fundamental de (1.5 val.)

$$X = \{(x,y) \in S^1 \times B^2 \colon y \in S^1 \text{ ou } x = 1\}.$$

(15) Seja G um grupo topológico conexo por arcos e localmente conexo por arcos, e a identidade de G. Seja $p : \tilde{G} \to G$ um revestimento conexo por arcos de G e $\tilde{e} \in \tilde{G}$ tal que $p(\tilde{e}) = e$.
  (a) Mostre que $\tilde{G}$ admite uma estrutura única de grupo topológico tal que $\tilde{e}$ é a identidade e p é um homomorfismo de grupos. *Sugestão: Recorde que num grupo topológico, a multiplicação no grupo fundamental é induzida pela multiplicação no grupo e use o teorema do levantamento.* (1 val.)
  (b) Qual é a relação entre os grupos fundamentais de $\tilde{G}$ e G? (0.5 val.)