Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TOPOLOGIA GERAL E INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTAÇÃO

SEGUNDO EXAME

23 DE JULHO DE 2004

(2 val.) (1) Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- (i) Um subespaço limitado e fechado de $\mathbb{R}^n$ é compacto.
- (ii) Um produto de espaços normais é normal.
- (iii) Um espaço compacto e Hausdorff satisfaz o primeiro axioma da numerabilidade.
- (iv) As componentes conexas por arcos de X são abertos de X.
- (v) Um subespaço de um espaço conexo é conexo.
- (vi) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é homeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.
- (vii) Um quociente de um espaço compacto é compacto.
- (viii) Uma aplicação aberta é uma aplicação quociente.
- (ix) Um espaço Lindelöf e Hausdorff tem base contável.
- (x) Um quociente de um espaço regular é T_1.

(1 val.) (2) Enuncie a propriedade universal da topologia produto.

(1.5 val.) (3) Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente. Mostre que se Y é conexo e $p^{-1}(\{y\})$ é conexo para todo o $y \in Y$ então X é conexo.

(1 val.) (4) Dê um exemplo de um espaço Hausdorff que não seja regular.

(1.5 val.) (5) Mostre que se Y é compacto e Hausdorff, então $f : X \to Y$ é contínua sse o gráfico de f

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

é fechado em $X \times Y$.

(1.5 val.) (6) Mostre que se $f : X \to Y$ é uma aplicação aberta e X tem uma base contável, então $f(X)$ também tem base contável.

(1.5 val.) (7) Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $F \subset X$ diz-se *localmente fechado* se cada $x \in F$ tem uma vizinhança V_x em X tal que $V_x \cap F$ é fechado em V_x. Mostre que F é localmente fechado sse F é a intersecção de um aberto com um fechado de X.

(2 val.) (8) Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- (i) Um espaço metrizável é completamente regular.
- (ii) Um espaço métrico completo é compacto.
- (iii) Um subconjunto totalmente limitado de um espaço métrico completo tem fecho compacto.
- (iv) Um espaço compacto e Hausdorff é um espaço de Baire.

(v) Qualquer campo vectorial contínuo $\vec{F} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ admite um prolongamento contínuo a $\mathbb{R}^2$.
(vi) A família $\mathcal{F} = \{f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in[0,1]}$ definida por $f_\alpha(x) = x^\alpha$ tem fecho compacto em $C([0,1],\mathbb{R})$ para a topologia compacta-aberta.
(vii) O grupo fundamental de um grupo topológico é abeliano.
(viii) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \colon z \in \mathbb{R}\}$ é simplesmente conexo.
(ix) Qualquer função contínua $f : S^1 \to S^2$ admite um prolongamento contínuo a $\mathbb{C}$.
(x) O coproduto de dois grupos não triviais pode ser abeliano.

(9) Enuncie o Teorema da metrização de Urysohn. (1 val.)

(10) Considere a sucessão de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por (1.5 val.)

$$f_n(x) = \frac{x}{n}.$$

Indique justificadamente se f_n converge na topologia da convergência pontual, na topologia compacta-aberta, ou na topologia da convergência uniforme em $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(11) Mostre que se Y é localmente compacto e Hausdorff, então a composição de funções (1.5 val.)

$$\circ : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$$

é uma aplicação contínua quando dotamos todos os espaços da topologia compacta-aberta.

(12) Calcule o grupo fundamental de $S^1 \times S^3 \times \mathbb{R}P^2$. (1 val.)

(13) Seja $B^2 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \le 1\}$ e considere a relação de equivalência em B^2 gerada por $e^{i\theta} \sim e^{i(\theta+2\pi/3)}$. Seja $X = B^2/\sim$ o espaço quociente. Calcule o grupo fundamental de X. (1.5 val.)

(14) Quantos revestimentos de duas folhas tem $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$? Correspondem a que subgrupos do grupo fundamental? Justifique. (1.5 val.)