Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TOPOLOGIA GERAL E INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTAÇÃO

PRIMEIRO TESTE

11 DE MAIO DE 2004

(3.6 val.) (1) Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- (i) Um espaço compacto e Hausdorff é normal.
- (ii) As componentes conexas de X são fechados de X.
- (iii) Um produto de espaços Lindelöf é Lindelöf.
- (iv) Um subconjunto limitado e fechado de um espaço métrico compacto é compacto.
- (v) Um produto de espaços conexos é conexo.
- (vi) Um subespaço de um espaço separável é separável.
- (vii) Um espaço compacto é sequencialmente compacto.
- (viii) Um conjunto totalmente ordenado com a topologia da ordem é um espaço normal.
- (ix) Um produto de espaços regulares é regular.
- (x) Um espaço quociente de um espaço compacto e Hausdorff é compacto e Hausdorff.
- (xi) Um espaço compacto e Hausdorff satisfaz o segundo axioma da numerabilidade.
- (xii) Um produto contável de espaços metrizáveis é metrizável.

(1.4 val.) (2) Enuncie o Teorema de Tychonoff.

(3) Considere o quadrado $X = [0,1] \times [0,1]$ com a topologia da ordem lexicográfica.
- (1.5 val.) (a) Determine se a sucessão $(\frac{1}{n}, \frac{1}{2})$ é convergente e em caso afirmativo calcule o limite.
- (1.5 val.) (b) X satisfaz o primeiro axioma da numerabilidade? Justifique.

(2.5 val.) (4) Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas com Y Hausdorff. Mostre que $\{x \in X \colon f(x) = g(x)\}$ é um subconjunto fechado de X.

(2.5 val.) (5) Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Mostre que se C é um subespaço conexo de X que intersecta A e $X \setminus A$, então C intersecta a fronteira de A.

(2 val.) (6) Mostre que um espaço localmente compacto e Hausdorff é regular.

(3 val.) (7) Mostre que se X é compacto e Y é Lindelöf, então $X \times Y$ é Lindelöf.

(2 val.) (8) Mostre por meio de um exemplo que o quociente de um espaço com base contável não tem necessáriamente uma base contável.