Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TOPOLOGIA GERAL E INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTAÇÃO

SEGUNDO TESTE PARA PRATICAR

21 DE JUNHO DE 2004

(3 val.) (1) Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- (i) Um espaço localmente compacto e Hausdorff é completamente regular.
- (ii) S^7 é simplesmente conexo.
- (iii) Se $X = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : z_1 = 1 \text{ ou } z_2 = 1\}$ então $\pi_1(X)$ é abeliano.
- (iv) A família de funções $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f(x) = nx$ é equicontínua.
- (v) Um espaço compacto e Hausdorff é um espaço de Baire.
- (vi) Existe uma retracção de $B^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ em S^1.
- (vii) O produto livre de dois grupos abelianos não triviais é abeliano.
- (viii) Qualquer função contínua de $f : S^1 \to \mathbb{C}$ admite um prolongamento contínuo a $\mathbb{C}$.
- (ix) Qualquer função contínua $f : S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ admite um prolongamento contínuo a $\mathbb{C}$.
- (x) $C(S^1, \mathbb{R}P^3)$ com a topologia compacta-aberta é conexo por arcos.

(2 val.) (2) Enuncie o Teorema relativo ao levantamento de aplicações contínuas a partir de espaços conexos por arcos e localmente conexos por arcos.

(2 val.) (3) Seja $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$ uma sucessão de espaços com X_i fechado em X_{i+1} e $X = \cup_i X_i$ com a topologia final determinada pelas inclusões $X_i \to X$ (portanto $U \subset X$ é aberto sse $U \cap X_i$ é aberto em X_i). Mostre que se cada X_i é normal então X é normal. *Sugestão: Use a caracterização dos espaços normais dada pelo Lema de Urysohn.*

(2 val.) (4) Mostre que um subconjunto aberto de um espaço de Baire é um espaço de Baire.

(2 val.) (5) Seja X um espaço localmente compacto e Hausdorff, $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sucessão equicontínua e pontualmente limitada de funções tal que para todo o $\epsilon > 0$ existe $K \subset X$ compacto tal que $y \notin K \Rightarrow |f_n(y)| < \epsilon$ para todo o n. Mostre que f_n tem uma subsucessão uniformemente convergente em X. *Sugestão: Considere a compactificação de Alexandroff de X e use o Teorema de Ascoli.*

(3 val.) (6) (a) Mostre que a aplicação $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida por $p(z) = e^z$ é uma aplicação de revestimento.

(2 val.) (b) Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma função holomorfa. Que condições sobre U garantem a existência de uma função holomorfa $g : U \to \mathbb{C}$ com $f(z) = e^{g(z)}$? Justifique.

(2 val.) (7) Seja X um espaço conexo por arcos. Estabeleça uma bijecção entre $[S^1, X]$ e as

classes de conjugação em $\pi_1(X, x_0)$ para $x_0 \in X$.

(2 val.) (8) Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e considere a compactificação de Alexandroff $i : \mathbb{R}^n \to S^n$. Mostre que a inclusão

$$i : \mathbb{R}^n \setminus K \to S^n \setminus i(K)$$

induz um isomorfismo de grupos fundamentais para $n > 2$. [1]

[1]Este exercício mostra que o grupo fundamental do complementar de um nó K é igual quer consideremos o nó em $\mathbb{R}^3$ ou S^3.