Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TOPOLOGIA GERAL E INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTAÇÃO

SEGUNDO TESTE PARA PRATICAR

21 DE JUNHO DE 2004

(1) Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
 (i) Um espaço localmente compacto e Hausdorff é completamente regular.
 (ii) S^7 é simplesmente conexo.
 (iii) Se $X = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 \colon z_1 = 1 \text{ ou } z_2 = 1\}$ então $\pi_1(X)$ é abeliano.
 (iv) A família de funções $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f(x) = nx$ é equicontínua.
 (v) Um espaço compacto e Hausdorff é um espaço de Baire.
 (vi) Existe uma retracção de $B^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ em S^1.
 (vii) O produto livre de dois grupos abelianos não triviais é abeliano.
 (viii) Qualquer função contínua de $f : S^1 \to \mathbb{C}$ admite um prolongamento contínuo a $\mathbb{C}$.
 (ix) Qualquer função contínua $f : S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ admite um prolongamento contínuo a $\mathbb{C}$.
 (x) $C(S^1, \mathbb{R}P^3)$ com a topologia compacta-aberta é conexo por arcos.

Resposta: V,V,F,F,V,F,F,V,F,F.

(2) Enuncie o Teorema relativo ao levantamento de aplicações contínuas a partir de espaços conexos por arcos e localmente conexos por arcos.

Resposta: Seja $p : Y \to B$ uma aplicação de revestimento, $b_0 \in B$ e $y_0 \in Y$ tal que $p(y_0) = b_0$. Dado um espaço X conexo por arcos e localmente conexo por arcos, e $f : X \to B$ contínua com $f(x_0) = b_0$, existe uma aplicação $\tilde{f} : X \to Y$ com $\tilde{f}(x_0) = y_0$ e $p \circ \tilde{f} = f$ sse $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$.

(3) Seja $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$ uma sucessão de espaços com X_i fechado em X_{i+1} e $X = \cup_i X_i$ com a topologia final determinada pelas inclusões $X_i \to X$ (portanto $U \subset X$ é aberto sse $U \cap X_i$ é aberto em X_i). Mostre que se cada X_i é normal então X é normal. *Sugestão: Use a caracterização dos espaços normais dada pelo Lema de Urysohn.*

Resposta: Começamos por notar que $F \subset X$ é fechado sse $F \cap X_i$ é fechado para qualquer i. Por indução, vemos que X_i é fechado em X_j para todo o $j > i$ (um fechado de um subespaço fechado é fechado). Uma vez que $X_i \cap X_j = X_{\min\{i,j\}}$, conclui-se que $X_i \subset X$ são subconjuntos fechados.

Dado $x \in X$, temos que $x \in X_i$ para algum i. X_i é normal, portanto T_1, logo $\{x\}$ é fechado em X_i e portanto em X. Conclui-se que X é T_1.

Sejam A, B, fechados não vazios e disjuntos de X. É suficiente mostrar que existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ com $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$ (uma vez que então $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ e $V = f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$ são abertos que separam A de B).

Definimos $A_i = A \cap X_i$ e $B_i = B \cap X_i$, e notamos que A_i, B_i são fechados em X_i. Seja N tal que $A \cap X_N \neq \emptyset$ e $B \cap X_N \neq \emptyset$ (que existe uma vez que A e B são não vazios). Pelo Lema de Urysohn, existe $f_N : X_N \to [0,1]$ contínua com $f(A_N) = 0$ e $f(B_N) = 1$.

Suponhamos que indutivamente construímos uma função contínua $f_i : X_i \to [0,1]$ com $f_i(A_i) = 0$ e $f_i(B_i) = 1$. Então, a função $g_{i+1} : A_{i+1} \cup X_i \cup B_{i+1} \to [0,1]$ definida por

$$g_{i+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A_{i+1} \\ f_i(x) & \text{se } x \in X_i \\ 1 & \text{se } x \in B_{i+1} \end{cases}$$

é contínua pelo lema da colagem. Uma vez que $A_{i+1} \cup X_i \cup B_{i+1}$ é fechado em X_{i+1}, pelo Teorema de Tietze, existe uma função contínua $f_{i+1} : X_{i+1} \to [0,1]$ que prolonga g_{i+1}. Por indução obtemos funções $f_i : X_i \to [0,1]$ para todo o $i \geq N$, satisfazendo $f_i(A_i) = 0, f_i(B_i) = 1$, e $f_{i+1}(x) = f_i(x)$ se $x \in A_i$. Assim, a expressão

$$f(x) = f_i(x) \text{ se } x \in A_i$$

define uma função $f : X \to [0,1]$ que é contínua pela propriedade universal da topologia final, uma vez que $f_{|X_i} = f_i$ é contínua em X_i.

Se $x \in A$ então $x \in A_i$ para algum i, pelo que $f(x) = f_i(x) = 0$, ou seja $f(A) = 0$. Da mesma forma, $f(B) = 1$ e portanto f é uma função com as características pretendidas, donde X é normal.

(4) Mostre que um subconjunto aberto de um espaço de Baire é um espaço de Baire.
Resposta: Seja X um espaço de Baire, $U \subset X$ um aberto e $\{F_n\}$ uma família de fechados de U com interior vazio. Temos a mostrar que a $\cup_n F_n$ tem interior vazio em U. Começamos por notar que o fecho de F_n em X, $\overline{F}_n \subset X$, tem interior vazio:

Caso contrário, se W fosse um aberto não vazio de X contido em $\overline{F_n}$, então, em particular teríamos, $W \cap \overline{F_n} \neq \emptyset$ e portanto $W \cap F_n \neq \emptyset$. Concluir-se-ia que $W \cap U$ é um aberto não vazio de U. Como $\overline{F_n} \cap U = F_n$ (porque F_n é por hipótese um fechado de U) vemos que $W \cap U \subset F_n$, contradizendo a hipótese de F_n ter interior vazio em U.

Uma vez que X é um espaço de Baire, $\cup_n \overline{F}_n$ tem interior vazio em X. Portanto, $\cup_n F_n$ tem interior vazio em X, e uma vez que o interior em U é a intersecção do interior em X com U conclui-se que $\cup_n F_n$ tem interior vazio em U, pelo que U é um espaço de Baire.

(5) Seja X um espaço localmente compacto e Hausdorff, $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções equicontínua e pontualmente limitada tal que para todo o $\epsilon > 0$ existe $K \subset X$ compacto tal que $y \notin K \Rightarrow |f_n(y)| < \epsilon$ para todo o n. Mostre que f_n tem uma subsucessão uniformemente convergente em X. *Sugestão: Considere a compactificação de Alexandroff de X e use o Teorema de Ascoli.*
Resposta: Se X é compacto então o Teorema de Ascoli garante que $\{f_n\}$ tem fecho compacto em $C(X, \mathbb{R})$ com a topologia da convergência uniforme, logo a sucessão f_n tem uma subsucessão uniformemente convergente.

Seja $i : X \to X^+$ a compactificação de Alexandroff de X. Definimos $g_n : X^+ \to \mathbb{R}$ pela expressão

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(i^{-1}(x)) & \text{se } x \in i(X) \\ 0 & \text{se } x = \infty. \end{cases}$$

Então $\{g_n\}$ é uma família equicontínua em X^+. De facto, uma vez que $g_n \circ i = f_n$, a restrição de g_n ao aberto $i(X)$ é equicontínua, e a condição do enunciado implica que para todo o $\epsilon > 0$ existe um compacto $K \subset X$ tal que para todo o n, $g_n^{-1}(]-\epsilon,\epsilon[)$ contém a vizinhança $i(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ de ∞ em X^+. Conclui-se assim que g_n é também equicontínua em ∞, pelo que $\{g_n\}$ é uma família equicontínua em X^+.

Como $\{f_n\}$ é pontualmente limitada, $\{g_n\}$ é pontualmente limitada em $i(X)$. Uma vez que $g_n(\infty) = 0$, a família g_n é também pontualmente limitada em ∞.

O teorema de Ascoli implica que $\{g_n\}$ tem fecho compacto para a topologia da convergência uniforme em $C(X^+, \mathbb{R})$. Uma vez que em espaços métricos, compacto implica sequencialmente compacto g_n tem uma subsucessão uniformemente convergente g_{n_k} e então, em particular, a subsucessão f_{n_k} converge uniformemente em X.

(6) (a) Mostre que a aplicação $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida por $p(z) = e^z$ é uma aplicação de revestimento.
(b) Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma função holomorfa. Que condições sobre U garantem a existência de uma função holomorfa $g : U \to \mathbb{C}$ com $f(z) = e^{g(z)}$? Justifique.

Resposta:

(a) A aplicação p é contínua e dado $re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, temos

$$p(z) = re^{i\theta} \Leftrightarrow z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Em particular, p é sobrejectiva.

Considerem-se os abertos $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 0\}$ e $V = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$. $\{U, V\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pelo que resta apenas ver que U e V são vizinhanças trivializantes.

Temos

$$p^{-1}(U) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} U_k$$

onde

$$U_k = \{x + iy \in \mathbb{C} \colon -\pi + 2k\pi < y < \pi + 2k\pi\}.$$

As aplicações

$$s_k : U \to U_k$$

definidas por

$$s_k(se^{i\alpha}) = \ln s + i(\alpha + 2k\pi)$$

(onde $-\pi < \alpha < \pi$) são contínuas e claramente s_k é a inversa de $p_{|U_k}$ pelo que U é uma vizinhança trivializante. De forma análoga vemos que V é uma vizinhança trivializante concluindo assim que p é uma aplicação de revestimento.

(b) Note-se que $g(z)$ é um levantamento de $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Uma vez que $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, o teorema de levantamento garante a existência de um levantamento contínuo g desde que $\pi_1(U, z) = 0$ para cada $z \in U$.

Um levantamento contínuo g é automaticamente uma função holomorfa uma vez que sendo p uma função holomorfa, as inversas locais p^{-1} são ainda funções holomorfas e portanto a composição $g = f \circ p^{-1}$ é holomorfa.

(7) Seja X um espaço conexo por arcos. Estabeleça uma bijecção entre $[S^1, X]$ e as classes de conjugação em $\pi_1(X, x_0)$ para $x_0 \in X$.

Resposta: Seja $x_0 \in X$ e escrevamos $<[\alpha]>= \{[\beta][\alpha][\overline{\beta}] \colon [\beta] \in \pi_1(X, x_0)\}$ para a classe de conjugação de $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(X, x_0)$. Seja ainda $<\pi_1(X, x_0)>$ o conjunto das classes de conjugação.

Definimos uma aplicação

$$\phi : [S^1, X] \to < \pi_1(X, x_0) >$$

da seguinte forma:

Dada $f : S^1 \to X$, seja $x = f(1)$ e seja $\gamma : [0,1] \to X$ um caminho com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = x_0$. Seja $p : [0,1] \to S^1$ a aplicação definida por $p(t) = e^{2\pi i t}$, de forma que $[p]$ é um gerador de $\pi_1(S^1, 1)$. Então $f_*([p]) \in \pi_1(X, x)$ e definimos

$$\phi([f]) = < \hat{\gamma}(f_*([p])) >$$

(i) ϕ *está bem definida:* Se $\gamma' : [0,1] \to X$ é outro caminho com $\gamma'(0) = x$ e $\gamma'(1) = x_0$ então $\widehat{\gamma'}(f_*([p]) = [\delta]\hat{\gamma}(f_*([p]))[\overline{\delta}]$ onde $[\delta] = [\gamma' * \overline{\gamma}] \in \pi_1(X, x)$ pelo que a classe de conjugação de $\hat{\gamma}(f_*([p]))$ é independente da escolha de γ. Por outro lado, se f e f' são homotópicas, existe um caminho $\epsilon : [0,1] \to X$ com $\epsilon(0) = f(1)$ e $\epsilon(1) = f'(1)$ tal que $f'_* = \hat{\epsilon} \circ f_*$. Então

$$\hat{\gamma}'(f'_*([p])) = \hat{\gamma}' \circ \hat{\epsilon}(f_*([p])) = \widehat{\gamma' * \epsilon}(f_*([p]))$$

e uma vez que $\gamma' * \epsilon$ é um caminho que une $f(1)$ a x_0, conclui-se que $\phi([f']) = \phi([f])$ pelo que ϕ está bem definida.

(ii) ϕ *é sobrejectiva:* Dado $\alpha : [0,1] \to X$ com $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, uma vez que $p : [0,1] \to S^1$ é uma aplicação quociente, pela propriedade universal da topologia quociente existe uma única aplicação contínua $f : S^1 \to X$ com $f \circ p = \alpha$. Escolhendo o caminho constante γ que une x_0 a ele próprio temos

$$\phi([f]) = < \hat{\gamma}(f_*([p])) > = < f_*([p]) > = < [\alpha] >$$

pelo que ϕ é sobrejectiva.

(iii) ϕ *é injectiva:* Suponhamos que $\phi([f]) = \phi([g])$. Então

$$\hat{\gamma}(f_*([p])) = \widehat{\gamma'}(g_*([p])) \Leftrightarrow f_*([p]) = \hat{\delta}(g_*([p]))$$

onde $\delta = \gamma' * \overline{\gamma}$ é um caminho que une $g(1)$ a $f(1)$. Seja $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ uma homotopia de caminhos entre $f \circ p$ e $\overline{\delta} * ((g \circ p) * \delta)$ E seja $q : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ uma aplicação contínua tal que $q(0,s) = (0,1)$, $q(1,s) = (1,1)$, e $q(t,0) = (d_1 * (d_2 * d_3))(t)$ com $d_i : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ definidos por $d_1(t) = (0, 1-t), d_2(t) = (t, 0)$ e $d_3(t) = (1, t)$.
Então $K = H \circ q : [0,1] \times [0,1] \to X$ é uma homotopia entre as aplicações $f \circ p, g \circ p : [0,1] \to X$ satisfazendo $K(0,s) = K(1,s) = \delta(s)$. Uma vez que $p \times \mathrm{id} : [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$ é uma aplicação quociente, K determina uma aplicação contínua $\tilde{K} : S^1 \times [0,1]$ que é uma homotopia entre f e g. Conclui-se que ϕ é injectiva.

(8) Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e considere a compactificação de Alexandroff $i : \mathbb{R}^n \to S^n$. Mostre que a inclusão

$$i : \mathbb{R}^n \setminus K \to S^n \setminus i(K)$$

induz um isomorfismo de grupos fundamentais para $n > 2$. [1]

Resposta: Escrevemos ∞ para o ponto de S^n que não está na imagem de i. Note-se que $i(K)$ é um fechado de S^n uma vez que é compacto.

[1]Este exercício mostra que o grupo fundamental do complementar de um nó K é igual quer consideremos o nó em $\mathbb{R}^3$ ou S^3.

Começamos por observar que dado um espaço X e $x \in X$, se C é a componente conexa por arcos que contém x então a inclusão $j : C \to X$ determina um isomorfismo de grupos fundamentais

$$j_* : \pi_1(C, x) \to \pi_1(X, x).$$

Se U é uma componente conexa por arcos de $S^n \setminus i(K)$ que não contém ∞ então $i^{-1}(U)$ é uma componente conexa por arcos de $\mathbb{R}^n \setminus K$ e $i : i^{-1}(U) \to U$ é um homeomorfismo pelo que $i_* : \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus K, x) \to \pi_1(S^n \setminus i(K), i(x))$ é um isomorfismo para todo o $x \in U$.

Seja agora W a componente conexa por arcos de $S^n \setminus i(K)$ que contém ∞ (note-se que W é aberto uma vez que S^n e portanto $S^n \setminus i(K)$ é localmente conexo por arcos). Utilizando a métrica induzida em S^n pela métrica usual em $\mathbb{R}^{n+1}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B_\epsilon(\infty)} \cap i(K) = \emptyset$ (em particular $B_\epsilon(\infty) \subset W$). Então $U = W \setminus \{\infty\}$ e $V = B_\epsilon(\infty)$ formam uma cobertura aberta de W.

V é contráctil, e em particular é conexo por arcos. $U \cap V = B_\epsilon(\infty) \setminus \{\infty\}$ retrata-se por deformação em $\{x \in S^n : d(x, \infty) = \epsilon/2\}$ que é homeomorfo a S^{n-1}. Em particular, $U \cap V$ é conexo por arcos desde que $n > 1$.

Vamos ver que U é conexo por arcos: dados $x, y \in U$, existe $\gamma : [0, 1] \to W$ com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Se $\infty \notin \mathrm{Im}(\gamma)$ então x e y estão na mesma componente conexa por arcos de U. Por outro lado, se $\infty \in \mathrm{Im}(\gamma)$, então podemos escolher $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(\infty)} \cap i(K) = \emptyset$,e $x, y \notin \overline{B_\delta(\infty)}$ e sendo $t_1 = \min\{t \in [0, 1] : d(\gamma(t), \infty) = \delta\}$, e $t_2 = \max\{t \in [0, 1] : d(\gamma(t), \infty) = \delta\}$, temos $0 < t_1 < t_2 < 1$ e escolhendo um caminho $g : [t_1, t_2] \to \{x \in S^n : d(x, \infty) = \delta\}$ tal que $g(t_1) = \gamma(t_1)$ e $g(t_2) = \gamma(t_2)$ (o que é possível porque $n > 1$), temos que $\gamma' : [0, 1] \to U$ definido por

$$\gamma'(t) = \begin{cases} i^{-1} \circ \gamma(t) & \text{se } 0 \le t \le t_1 \\ i^{-1} \circ g(t) & \text{se } t_1 \le t \le t_2 \\ i^{-1} \circ \gamma(t) & \text{se } t_2 \le t \le 1 \end{cases}$$

é um caminho (é contínuo pelo lema da colagem) que une x a y pelo que a componente conexa de x e y coincidem.

Podemos portanto aplicar o teorema de Seifert-Van Kampen a $\{U, V\}$ e $x \in U \cap V$, obtendo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, x) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, x) \arrow[d] \\ \pi_1(V, x) \arrow[r] & \pi_1(W, x) \end{tikzcd}$$

é um *pushout*. Uma vez que V é contráctil temos $\pi_1(V, x) = 0$, e se $n > 2$, como S^{n-1} é simplesmente conexo temos ainda que $\pi_1(U \cap V, x) = 0$. Pela propriedade universal do pushout concluímos que a inclusão $U \to W$ induz um isomorfismo $\pi_1(U, x) \to \pi_1(W, x)$ e portanto

$$i_* : \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus K, x) \to \pi_1(S^n \setminus K, x)$$

é um isomorfismo, o que conclui a demonstração.