Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TOPOLOGIA GERAL E INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTAÇÃO

RESOLUÇÃO DO TESTE PARA PRATICAR

5 DE MAIO DE 2004

(1) Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
(i) Um espaço com a propriedade de Bolzano-Weierstrass é compacto.
(ii) As componentes conexas de X são abertos de X.
(iii) Um subespaço fechado de um espaço de Lindelöf é um espaço de Lindelöf.
(iv) Um subconjunto compacto de um espaço T_1 é fechado.
(v) Um produto de espaços normais é normal.
(vi) Um produto contável de espaços com base contável tem base contável.
(vii) Um subespaço de um espaço regular é regular.
(viii) Um subconjunto aberto de um espaço localmente compacto é localmente compacto.
(ix) Uma aplicação quociente leva abertos em abertos.
(x) Um espaço com base contável é separável.
Resposta: F, F, V, F, F, V, V, F, F, V.

(2) Enuncie a caracterização dos espaços compactos em termos da propriedade da intersecção finita.
Resposta: Uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos tem a propriedade da intersecção finita sse $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$. Um espaço X é compacto sse toda a família $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de fechados de X com a propriedade da intersecção finita é tal que $\cap_{\alpha \in J} F_\alpha \neq \emptyset$.

(3) Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.
(a) Mostre que os conjuntos da forma $[a, b)$ formam uma base de topologia em $\mathbb{R}$.
(b) A sucessão $(-1)^n/n$ converge nesta topologia? Justifique.
Resposta:
(a) Temos $\cup_{x \in \mathbb{R}}[x, x+1) = \mathbb{R}$ pelo que a união de todos os intervalos da forma $[a, b)$ é $\mathbb{R}$. Dados intervalos $[a, b)$, $[c, d)$ e $x \in [a, b) \cap [c, d)$ temos que $x \in [\max\{a, c\}, \min\{b, d\}) \subset [a, b) \cap [c, d)$ pelo que os intervalos $[a, b)$ formam uma base de topologia.
(b) Uma vez que $]a, b[= \cup_{n=1}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b[$ é um aberto na topologia da alínea anterior, ela é mais fina que a topologia usual em $\mathbb{R}$. Como tal, se a sucessão convergir tem que convergir para o seu limite na topologia usual que é 0. No entanto, a sucessão não converge para 0, uma vez que considerando a vizinhança $[0, 1)$ de 0, há infinitos termos da sucessão fora de $[0, 1[$ (os termos ímpares). Conclui-se que a sucessão não converge na topologia dada.

(4) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto de todos os vectores com pelo menos uma coordenada irracional. Determine se X é conexo. Justifique.
Resposta: Este conjunto é conexo por arcos logo é conexo. De facto dados $x, y \in X$, sejam $i, j \in \{1, ..n\}$ tais que x_i e y_j são irracionais. Se $i = j$, $\alpha : [0, 1] \to X$

definido por $\alpha(t) = tx + (1-t)y$ é um caminho em X que une x a y. Se $i \neq j$ seja $z \in X$ tal que $z_i = x_i$ e $z_j = y_j$. Então pelo argumento anterior existem caminhos em X unindo x a z e z a y, pelo que x e y estão na mesma componente conexa por arcos. Conclui-se que X é conexo por arcos.

(5) Mostre que a imagem de um espaço normal por uma aplicação contínua e fechada é um espaço normal.
Resposta: Seja X um espaço normal e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Temos a mostrar que se f é fechada e sobrejectiva então Y é normal.
Como f é sobrejectiva, dado $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X é T_1, $\{x\}$ é fechado em X e sendo f uma aplicação fechada, $\{y\} = f(\{x\})$ é um fechado de Y pelo que Y é T_1.
Começamos agora por ver que se $G \subset X$ é um fechado saturado para a aplicação f e U é um aberto tal que $U \supset G$ então existe um aberto W de X tal que $G \subset f^{-1}(W) \subset U$: Como f é fechada, $f(U^c)$ é fechado e uma vez que G é saturado, temos $f(U^c) \cap f(G) = \emptyset$. Podemos tomar $W = f(U^c)^c$ uma vez que este conjunto é aberto, $f^{-1}(f(U^c)^c) = f^{-1}(f(U^c))^c \subset (U^c)^c = U$, e uma vez que G é saturado, isto é que $G = f^{-1}(f(G))$, temos $f(G) \subset f(U^c)^c \implies G \subset f^{-1}(W)$.
Sejam agora F_1 e F_2 fechados disjuntos de X. Então $G_i = f^{-1}(F_i), i = 1, 2$ são fechados saturados de X e disjuntos. Sendo X normal, existem abertos $U_i \supset G_i$ para $i = 1, 2$, disjuntos. Pelo parágrafo anterior, existem $W_i, i = 1, 2$ abertos de Y tais que $G_i \subset f^{-1}(W_i) \subset U_i$. pelo que W_i são disjuntos e separam os fechados F_i.
Conclui-se que X é normal.

(6) Seja S_Ω o primeiro ordinal não contável com a topologia da ordem. Quais dos quatro axiomas da numerabilidade são satisfeitos por S_Ω? Justifique.
Resposta: S_Ω satisfaz o primeiro axioma da numerabilidade: Seja $x \in S_\Omega$. Se $x = \min S_\Omega$ então $\{x\} =]-\infty, x+1[$ é uma vizinhança de x (onde $x + 1 = \min\{y \in S_\Omega : y > x\}$) pelo que $\{x\}$ tem uma base de vizinhanças com um único elemento. Se $x \in S_\Omega$ não é o mínimo, então $\{]y, x+1[: y < x\}$ é claramente uma base de vizinhanças de x e é contável porque por definição de S_Ω o conjunto $\{y \in S_\Omega : y < x\}$ é contável para todo o $x \in S_\Omega$.
S_Ω não é separável: Qualquer subconjunto contável $A \subset S_\Omega$ é majorado. Seja M um majorante. Então $\{z \in S_\Omega : z > M\}$ é um aberto não vazio de S_Ω que não intersecta A pelo que A não é denso.
Conclui-se do parágrafo anterior que S_Ω também não satisfaz o segundo axioma da numerabilidade (uma vez que este implica separabilidade).
S_Ω não é Lindelöf: Como S_Ω não tem máximo, os conjuntos $\{]-\infty, x[\}_{x \in S_\Omega}$ formam uma cobertura aberta de S_Ω que não admite qualquer subcobertura contável. De facto, uma vez que qualquer subconjunto contável de S_Ω é majorado, dados $x_n \in S_\Omega$ e sendo M um majorante de $\{x_n\}$, temos $\cup_{n=1}^{\infty}]-\infty, x_n[\subset]-\infty, M[\neq S_\Omega$.

(7) Um espaço X diz-se *contavelmente compacto* se toda a cobertura aberta contável de X tem uma subcobertura finita. Mostre que se X é T_1 então X é contavelmente compacto sse tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.
Resposta: Seja X um espaço T_1. Recorde-se que se $x \in X$ é ponto de acumulação de um conjunto $A \subset X$, toda a vizinhança de x contém infinitos pontos de A.

Suponhamos que $\{U_n : n = 1, \ldots, \infty\}$ é uma cobertura aberta numerável de X sem subcoberturas finitas. Substituindo U_n por $\cup_{k=1}^n U_k$ e eliminando repetições podemos supor que U_n está estritamente contido em U_{n+1} para cada n.

Sob esta hipótese podemos escolher $x_n \in U_{n+1} \setminus U_n$. O conjunto $A = \{x_n\}$ é infinito uma vez que dados x_n e x_k, e assumindo sem perda de generalidade que $n > k$ temos $x_n \notin U_{k+1}$ e $x_k \in U_{k+1}$ pelo que $x_n \neq x_k$. Resta ver que A não tem pontos de acumulação. Dado $y \in X$, existe k tal que $y \in U_k$ e então U_k é um aberto que contém y mas não contém nehum x_n com $n \geq k$. Assixm, U_k contém apenas um número finito de pontos de A o que implica que y não é um ponto de acumulação de A.

Conclui-se que se X é T_1 e tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass então X é contavelmente compacto.

Reciprocamente, suponhamos que $A \subset X$ é um conjunto infinito sem pontos de acumulação, que sem perda de generalidade podemos assumir ser numerável. Então A é fechado, uma vez que $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \emptyset$. Dado um ponto $a \in A$ podemos escolher uma vizinhança V_a de a tal que $V_a \cap A = \{a\}$ (uma vez que a não é um ponto de acumulação de A). A família contável de abertos $\mathcal{U} = \{V_a \colon a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$. é uma cobertura de X e manifestamente não tem subcoberturas finitas uma vez que cada ponto $a \in A$ pertence a um único aberto de $\mathcal{U}$.

Conclui-se que se X é contávelmente compacto então X tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass (a condição de X ser T_1 não é necessária para esta implicação).

(8) Considere o espaço $H = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\omega | 0 \leq x_n \leq 1/n\}$ com a métrica

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$$

Mostre que H é compacto.
Resposta: Uma vez que

$$H = \prod_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

pelo teorema de Tychonoff, H é compacto para a topologia produto. Basta portanto ver que a topologia induzida pela métrica d é menos fina que a topologia produto em H (que coincide ainda com a topologia induzida em H pela topologia produto em $\mathbb{R}^\omega$).

Para ver isto, é suficiente mostrar que dado $x \in H$, e $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U de x na topologia produto tal que $x \in U \subset B_\epsilon^d(x)$. Seja k tal que

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n}^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$$

Tomemos

$$U = \left(\prod_{n=1}^{k-1}]x_n - \delta, x_n + \delta[\times \prod_{n=k}^{\infty} \mathbb{R} \right) \cap H$$

com δ escolhido de tal forma que $(k-1)\delta^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$. Então se $y \in U$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 &= \sum_{n=1}^{k-1} |x_n - y_n|^2 + \sum_{n=k}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \\
&< \sum_{n=1}^{k-1} \delta^2 + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&< \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}
\end{aligned}$$

pelo que $d(x,y) < \epsilon$ o que mostra que $U \subset B_\epsilon^d(x)$.

Nota: H chama-se o *cubo de Hilbert*. É fácil ver que na realidade a topologia induzida pela métrica coincide com a topologia produto.