

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 1 (a entregar na semana de 19/09/2005)

1. Calcule todas as primitivas das seguintes funções:

a) $\frac{x}{1+x^4}$ b) $e^x \sin 2x$ c) $e^x \sin^2 x$.

2. Sem recorrer a primitivas, calcule os integrais seguintes:

a) $\int_0^1 (1-x) dx$ b) $\int_{-1}^3 (4-2x) dx$.

3. Sabendo que $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$ e $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \pi/4$, calcule:

a) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx$ b) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2 x dx$ c) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 x dx$.

Resolução:

1. a) Observando que $(x^2)' = 2x$, obtemos

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \int \frac{1}{2} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \int \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \arctg(x^2) dx = \frac{1}{2} \arctg(x^2) + c, c \in \mathbb{R}.$$

b) Vamos utilizar primitivação por partes:

$$\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - \int 2e^x \cos 2x dx.$$

De novo por partes,

$$\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + \int 2e^x \sin 2x dx.$$

Destas duas igualdades concluímos que

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5}(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

c) Primitivando por partes:

$$\int e^x \sin^2 x dx = e^x \sin^2 x - \int 2e^x \sin x \cos x dx.$$

Ora, $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ e utilizando a alínea b) temos

$$\int e^x \sin^2 x dx = e^x \sin^2 x - \frac{1}{5}(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. a) A região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = 1 - x$, $x \in [0, 1]$ e o eixo dos x é um triângulo de base 1 e altura 1. Logo,

$$\int_0^1 (1-x) dx = \text{area} = \frac{1}{2}.$$

- b) A região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = 4 - 2x, x \in [-1, 3]$ e o eixo dos x é constituída por dois triângulos. O primeiro, que corresponde à região onde $f > 0$, tem base $2 - (-1) = 3$ e altura dada por $f(-1) = 6$. A sua área, 9, contribui positivamente para o integral de f . O segundo triângulo corresponde à região onde $f < 0$ e tem base $3 - 2 = 1$ e altura $|f(3)| = 2$. Logo, a sua área é 1 e este valor contribui com um sinal negativo para o integral de f . Logo,

$$\int_{-1}^3 (4 - 2x) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x) dx + \int_2^3 (4 - 2x) dx = 9 - 1 = 8.$$

3. a) Como $\sin x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x + \pi)$ temos

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx = 1.$$

Logo,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx = 1 + 1 - 1 = 1.$$

- b) De modo semelhante temos $\sin^2 x = \sin^2(x + \pi/2) = \sin^2(x + \pi)$. Logo,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$$

- c) Sabemos que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Por outro lado, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} 1 dx = \frac{3}{2}\pi$, pois é a área de um rectângulo de base $\frac{3}{2}\pi$ e altura 1. Logo,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (1 - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} 1 dx - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2 x dx = \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi.$$