Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

Exercícios de Auto-Avaliação
(Cálculo Integral)

1. Calcule os integrais seguintes:

   a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^1 \tan^3 x\,dx$

   e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx$

   f) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$

   g) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \operatorname{sen} x\,dx.$

2. Mostre que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\cos 2x\,dx = 0.$

3. Calcule a área da região limitada pela elipse de equação $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$.

4. Calcule o volume de cada uma das regiões seguintes:

   a) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 1-x^2-y^2\}$

   b) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\ge 0\,;\, y\ge 0\,;\, z\ge 0\,;\, x+y\le 1\,;\, x+y-z\ge 0\}$.

5. Calcule o comprimento do gráfico da função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\cosh x$.

6. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função integrável. Prove que existe $c\in[a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^c f=\int_c^b f$.

7. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\displaystyle\int_a^b f=0$. Prove que existe $c\in\,]a,b[$ tal que $f(c)=0$.

8. Dada uma função contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, considere a função

$$\Phi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\,,\qquad x>0.$$

   Prove que se f for não negativa e crescente, então Φ também o será.

9. Resolva as equações seguintes:

   a) $f(x)=1+\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

   b) $f(x)=1-\displaystyle\int_0^x f(t)\,\operatorname{sen} t\,dt.$