Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 11 (a entregar na semana de 5/12/2005)

1. Considere a função
$$f(x,y)=\frac{1}{1-x^2-y^2}.$$
Determine a série de Taylor de f na origem e a região em que a série converge.

2. Encontre e classifique os pontos de estacionaridade das seguintes funções:

   a) $f(x,y)=-3(x^2+y^2)+2xy$.

   b) $f(x,y,z)=(x^2+y^2-z)(1-z^2)$.

Resolução:

1. Reconhecemos que a função é a soma da série geométrica
$$\frac{1}{1-x^2-y^2}=\sum_{j=0}^{\infty}(x^2+y^2)^j,$$
para $x^2+y^2<1$. Pela unicidade da representação de f por uma série de potências de x e y, obtemos que esta série é a série de Taylor da f na origem. Expandindo cada um dos termos da série geométrica, obtemos
$$\frac{1}{1-x^2-y^2}=1+(x^2+y^2)+(x^4+2x^2y^2+y^4)+\cdots+\sum_{j=1}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\ j\end{array}\right)x^{2j}y^{2n-2j}+\cdots$$

2. a) Temos $\nabla f(x,y)=(-6x+2y,-6y+2x)$. Logo, a equação $\nabla f(x,y)=(0,0)$ tem apenas a solução $x=y=0$ e o ponto $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.
A matriz Hessiana de f é
$$H_f(x,y)=\left[\begin{array}{cc}-6 & 2\\ 2 & -6\end{array}\right].$$
Os valores próprios de $H_f(0,0)$ são dados por
$$\det(H_f(0,0)-\lambda I)=(-6-\lambda)^2-4=0,$$
ou seja $\lambda=-8$ e $\lambda=-4$. Assim, $H_f(0,0)$ é definida negativa e $(0,0)$ é um máximo.

   b) Temos $\nabla f(x,y,z)=(2x(1-z^2),2y(1-z^2),-(1-z^2)-2z(x^2+y^2-z))$. Logo, os pontos críticos são dados por
$$\{x=0\vee z\pm 1\}\wedge\{y=0\vee z=\pm 1\}\wedge\{(1-z^2)+2z(x^2+y^2-z)=0\}.$$
Assim temos $x=y=0$ e $z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, ou seja os pontos críticos $a=(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $b=(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$. Temos também as soluções com $z=+1$ e $x^2+y^2=1$, que representam uma circunferência de raio 1 no plano $z=1$ constituída por pontos críticos. (Verifica-se facilmente que para $z=-1$ não existem valores de x e y que resolvam a terceira equação.)

A matriz Hessiana de f é dada por,

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2(1-z^2) & 0 & -4xz \\ 0 & 2(1-z^2) & -4yz \\ -4xz & -4yz & 4z-2(x^2+y^2-z) \end{bmatrix}.$$

Então,

$$H_f(0,0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\frac{4}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Assim, os valores próprios de $H_f(a)$ são todos positivos e a é um mínimo, ao passo que $H_f(b)$ tem dois valores próprios positivos e um negativo sendo indefinida e sendo o ponto b um ponto em sela.
Seja agora $p = (x,y,z)$ com x^2+y^2 e $z=1$. Temos,

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4x \\ 0 & 0 & -4y \\ -4x & -4y & 4 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios são solução de

$$-\lambda(-\lambda(4-\lambda)-16y^2)+16x^2\lambda = 0.$$

Como $x^2+y^2=1$, obtemos, resolvendo $\lambda(16+\lambda(4-\lambda))=0$, os valores próprios $0, 2+2\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5}$. Logo, $H_f(p)$ é indefinida e qualquer destes pontos p é um ponto em sela.