Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 3 (a entregar na semana de 3/10/2005)

1. Uma partícula move-se ao longo do eixo dos x com uma velocidade dada por

$$v(t) = \frac{\cos^3 t}{\operatorname{sen}^2 t},\ t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}].$$

Calcule o deslocamento total da partícula após o movimento.

2. Determine a função f tal que

$$\int_{e^{-x}}^{e^x} f(t)\, dt = x \cosh x - \sinh x.$$

Resolução:

1. O deslocamento será dado pela diferença entre a posição final $x(\frac{\pi}{4})$ e a inicial $x(\frac{\pi}{6})$. Sabendo que a velocidade é a derivada da posição segundo a variável tempo, temos então

$$x(\frac{\pi}{4}) - x(\frac{\pi}{6}) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

Para calcular o integral, temos

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\operatorname{sen}^2 t)\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

Mudando de variável $u = \operatorname{sen} t$, obtemos $u'(t) = \cos t$. Temos ainda $u(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ e $u(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo,

$$x(\frac{\pi}{4}) - x(\frac{\pi}{6}) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-u^2}{u^2} du = [-\frac{1}{u} - u]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{2}.$$

2. As funções e^x, e^{-x} e $x\cosh x - \sinh x$ são diferenciáveis. Logo, teremos

$$\left(\int_{e^{-x}}^{e^x} f(t)\, dt \right)' = (x\cosh x - \sinh x)'.$$

Desenvolvendo ambos os membros obtemos,

$$e^x f(e^x) - (-e^{-x} f(e^{-x})) = x \sinh x = \frac{1}{2}(xe^x - xe^{-x}).$$

Queremos então $f(e^x) = \frac{x}{2}$ e $f(e^{-x}) = -\frac{x}{2}$, ou seja $f(t) = \frac{1}{2}\log t$.