Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 4 (a entregar na semana de 10/10/2005)

1. Calcule o comprimento da linha representada pelo gráfico da função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + x^2$.

2. Calcule o volume do sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$$

Resolução:

1. Seja L o comprimento da linha. Então,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

ou seja

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Efectuando a substituição $x = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(t)$ e, tendo em conta que $\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$, teremos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \cosh^2(t)\, dt \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \left(e^t + e^{-t}\right)^2\, dt \\ &= \frac{1}{16}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} 2e^{2t}\, dt - \frac{1}{16}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (-2)e^{-2t}\, dt + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) \\ &= \frac{1}{16}\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{16\left(2+\sqrt{5}\right)^2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

2. Por definição, S pode ser visto como o conjunto de círculos de raio $\sqrt{1+z^2}$, em que $0 \leq z \leq 1$. Portanto, o volume de S, designado por $\operatorname{vol}(S)$, será dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(S) &= \int_0^1 \pi\left(1+z^2\right)\, dz \\ &= \pi\left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$