Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 5 (a entregar na semana de 17/10/2005)

1. Calcule (sem recorrer a uma calculadora!) $\log(1.01)$ com um erro inferior a 10^{-5}.
2. Encontre e classifique os extremos de $f(x) = x^3 e^{-x^2}$. Utilize esta informação para esboçar o gráfico de f.
3. Determine se a função $g(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ é analítica na origem. Qual o raio de convergência da série de Taylor ?

Resolução:

1. Seja $h(x) = \log(1+x)$. Calculando as derivadas de h obtemos
$$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, n = 1, 2, \ldots$$
Temos então a fórmula de Taylor para f na origem,
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1^{n-1})\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$
onde, pela fórmula de Lagrange para o resto,
$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},$$
para algum c com $|c| < |x|$. (Se $x > 0$ então $c \in [0, x]$. Caso contrário $c \in [x, 0]$). Como estamos interessados em $h(0.01)$, tomamos $x = 0.01$ e c será positivo pelo que o resto será majorado pelo valor com $c = 0$. Logo,
$$|r_n(0.01)| \leq \frac{10^{-2(n+1)}}{(n+1)}.$$
Tomando $n = 2$ obtemos $|r_2(0.01)| \leq \frac{1}{3}10^{-6} < 10^{-5}$. Então, com esta precisão, temos
$$\log(1.01) = 0.01 - \frac{(0.01)^2}{2} \pm \frac{1}{3}10^{-6} = 0.01 - 0.00005 \pm \frac{1}{3}10^{-6} = 0.00995 \pm \frac{1}{3}10^{-6}.$$
Verifique na calculadora que o resultado está correcto.

2. Sendo $f'(x) = (3x^2 - 2x^4)e^{-x^2}$, a função f terá 3 pontos de estacionaridade dados por $x^2(3 - 2x^2) = 0$, ou seja, $x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

   Temos $f''(x) = (6x - 14x^3 + 4x^5)e^{-x^2}$. Logo, $f''(0) = 0$ e
$$f''(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = (\pm 6\sqrt{\frac{3}{2}} \mp 21\sqrt{\frac{3}{2}} \mp 9\sqrt{\frac{3}{2}}).$$
   Então, $f''(+\sqrt{\frac{3}{2}}) < 0$ e $f''(-\sqrt{\frac{3}{2}}) > 0$. Concluímos assim que $+\sqrt{\frac{3}{2}}$ é um máximo e que $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ é um mínimo.

   Note-se que $f^3(x) = (6 - 42x^2 + 20x^4 - 12x^2 + 28x^4 - 8x^6)e^{-x^2}$ e, portanto, $f^3(0) = 6 \neq 0$. Como 3 é ímpar, concluímos que $x = 0$ não é um extremo mas apenas um ponto de inflexão.

3. Temos

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}.$$

A função $\frac{1}{1-x}$ é analítica na origem e

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ |x| < 1.$$

A função $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)}$ é analítica na origem e

$$\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, \ |x| < 2.$$

Logo, g será analítica na origem, com

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} x^n, \ |x| < 1.$$