Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 7 (a entregar na semana de 31/10/2005)

Exercícios de revisão:

1. Calcule o volume do sólido
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le e,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \log z\}.$$
2. a) Escreva a série de Taylor em $x = 0$ para $\frac{1}{1+x^2}$ e determine o seu raio de convergência.
   b) Seja $f(x) = \arctan x$. Utilize a alínea a) para determinar $f^{(5)}(0)$.
3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \cos(\frac{3x^5-4y^4}{2x^2+8y^2})$. Será possível estender f a todo o $\mathbb{R}^2$ como função contínua ? Em caso afirmativo, determine o valor apropriado de $f(0,0)$.

Resolução:

1. Note-se que se fixarmos z na definição de S obtemos um círculo dado pela equação $\sqrt{x^2+y^2} \le z \log z$, ou seja, um círculo de raio $z \log z$ e centrado no ponto $(0,0,z)$.
   Portanto, o sólido S é o conjunto ("pilha") de todos estes círculos horizontais em que $1 \le z \le e$.
   Logo,
$$Vol(S) = \int_1^e \pi z^2 \log^2 z\, dz = \pi \frac{z^3}{3} \log^2 z|_1^e - \int_1^e \pi \frac{2z^2}{3} \log z\, dz = \pi \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\pi \int_1^e z^2 \log z\, dz.$$
   Integrando por partes mais uma vez,
$$Vol(S) = \pi \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\pi \frac{z^3}{3} \log z|_1^e + \frac{2}{9}\pi \int_1^e z^2\, dz = \pi \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9}\pi e^3 + \frac{2}{27}\pi(e^3-1).$$
2. a) Através da série geométrica, temos de imediato
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$
   Esta série converge para $|-x^2| < 1$, ou seja $|x| < 1$. Logo, o raio de convergência é 1.
   b) Se $f(x) = \arctan x$, temos $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Primitivando a série da alínea anterior termo a termo, para $|x| < 1$, temos
$$\arctan(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$
   onde c é uma constante.
   Como $\arctan(0) = 0$ temos $c = 0$ e $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
   Logo, $f^{(5)}(0)$ será dado pelo coeficiente de $\frac{x^5}{5!}$ e, portanto, $f^{(5)}(0) = \frac{5!}{5} = 4! = 24$.
3. Note-se que
$$\left|\frac{3x^5-4y^4}{2x^2+8y^2}\right| \le \frac{|3x^5|}{2x^2+2y^2} + \frac{|4y^4|}{2x^2+2y^2} \le \frac{3}{2}|x|^3 + 2y^2 \le \frac{3}{2}\|(x,y)\|^3 + 2\|(x,y)\|^2$$
   e, portanto,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^5-4y^4}{2x^2+8y^2} = 0.$$
   Logo, definindo $f(0,0) = 1$ temos f contínua em $\mathbb{R}^2$.