Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 8 (a entregar na semana de 14/11/2005)

Considere a função $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

a) Caracterize topologicamente o domínio de f.

b) Descreva os conjuntos de nível de f.

c) Calcule a derivada de f no ponto $(0,1)$.

d) Calcule as derivadas direccionais de f no ponto $(1,0)$.

Resolução:

a) Dado que deveremos ter $x^2 + y^2 > 0$, o domínio de f é o conjunto aberto, não limitado e conexo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Cada conjunto de nível C_α de f será caracterizado pela condição $f(x,y) = \alpha$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, teremos

$$C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x^2 + y^2) = \alpha\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = e^\alpha\}$$

e, portanto, os conjuntos de nível de f serão as circunferências centradas na origem.

c) Note-se que as derivadas parciais de f são contínuas no domínio de f e, portanto, a função f é diferenciável e a sua derivada no ponto $(0,1)$ será representada pela matriz

$$Df(0,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}_{(0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente, teremos

$$Df(0,1) = \nabla f(0,1) = (0,2).$$

d) Seja $w = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ um vector qualquer. Então, a derivada de f segundo w será dada por

$$D_w f(1,0) = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}_{(1,0)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 2u$$