Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 9 (a entregar na semana de 21/11/2005)

Considere as funções:

$$f(x,y,z) = (z, -x^2, -y^2) \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = x + y + z.$$

Sejam $v = (1,2,3)$ e $u = (2,3,\frac{1}{2})$.

1. Calcule as matrizes Jacobianas de f, g e $g \circ f$.
2. Calcule as seguintes derivadas direccionais:
$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1),\ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1),\ \frac{\partial g}{\partial v}(0,1,0),\ \frac{\partial (g\circ f)}{\partial u}(2,0,1).$$
3. Determine a direcção de crescimento máximo de $g \circ f$ no ponto $(1,0,1)$.
4. Determine a recta normal ao parabolóide
$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 - y^2 = 3\},$$
no ponto $(1,1,5)$.

Resolução:

1. Temos,
$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2x & 0 & 0 \\ 0 & -2y & 0 \end{bmatrix},$$
e
$$Dg(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Temos também, $g \circ f(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = z - x^2 - y^2$, pelo que
$$D(g\circ f)(x,y,z) = \begin{bmatrix} -2x & -2y & 1 \end{bmatrix}.$$
Note-se que as derivadas parciais de $f, g, g \circ f$ são contínuas pelo que estas funções são diferenciáveis.

2. Temos:
$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1) = Df(1,1,1)\cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix};$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1) = Df(0,0,1)\cdot u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,1,0) = Dg(0,1,0)\cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6.$$
$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial u}(2,0,1) = D(g\circ f)(2,0,1)\cdot u = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{15}{2}.$$

3. A direcção de crescimento máximo é dada por $\nabla(g \circ f)(1,0,1) = (-2,0,1)$, ou, normalizando, por $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

4. P é o conjunto de nível do campo escalar $g \circ f$ dado por $g \circ f(x,y,z) = 3$. Logo, o vector $\nabla(g \circ f)(1,1,5) = (-2,-2,1)$ é normal a P em $(1,1,5)$. A recta normal a P em $(1,1,5)$ é então dada por
$$L = \{(1,1,5) + t(-2,-2,1), t \in \mathbb{R}\}.$$