Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 12

1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 2 \\ \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ onde este sistema tem uma solução única.

2. Considere a seguinte equação

$$z + e^{x+zy^2} = 1.$$

a) Mostre que a equação define z como função de x, y numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$.

b) Calcule as derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1); \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1).$$

3. Considere o conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + e^{x+zy^2} = 1\right\}.$$

Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(0, 0, 0)$.

4. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos do conjunto descrito pela equação $x = y^2$ que se encontram mais próximos do ponto $(1, 0)$.

Resolução:

1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \operatorname{sen} x + \cos y\right).$$

Trata-se de uma função de classe C^1 que verifica $F(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (2, 1)$, ou seja, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é uma solução do sistema de equações. O Teorema da Função Inversa garante que na vizinhança do ponto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ o sistema tem solução única desde que $\det DF(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \neq 0$.

De facto, temos

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} -2\frac{y^2}{x^3} & 2\frac{y}{x^2} \\ \cos x & -\operatorname{sen} y \end{bmatrix}$$

e, portanto, no ponto $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, obtemos

$$DF(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\pi} & \frac{4}{\pi} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e $\det DF(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi} \neq 0$.

Assim, F é invertível numa vizinhança do ponto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ou seja, o sistema tem uma solução única numa vizinhança deste ponto.

2. a) Seja $F(x, y, z) = z + e^{x+zy^2} - 1$. Note-se que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $F(0, 1, 0) = 0$. Para além disso temos

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 0) = (1 + e^{x+zy^2})_{|(0,1,0)} = 2 \neq 0.$$

Portanto, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$ em que se pode exprimir z como função de x, y a partir da equação $F(x, y, z) = 0$.

b) Fazendo $z = z(x, y)$ e derivando a equação $F(x, y, z(x, y)) = 0$ em ordem a x obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 0) + \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 0)\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 0$$

e, portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = -\frac{1}{2}.$$

Do mesmo modo, derivando a equação $F(x, y, z(x, y)) = 0$ em ordem a y obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 0.$$

3. O vector $\nabla F(0, 0, 0) = (1, 0, 1)$ gera o espaço normal a M no ponto $(0, 0, 0)$ e, portanto, o espaço normal é a recta

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\,;\, z = x\}.$$

O correspondente espaço tangente será dado por

$$\begin{aligned} T_{(0,0,0)}M &= \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : (u, v, w) \cdot (1, 0, 1) = 0\} \\ &= \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u + w = 0\} \\ &= \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u = -w\} \\ &= \{(-w, v, w)\,,\, (v, w) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

ou seja, será o espaço gerado pelo conjunto de vectores

$$\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}.$$

4. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função de classe C^1 definida por $F(x, y) = x - y^2$ e seja L o conjunto de nível zero de F.

Assim, deveremos determinar os pontos de L que minimizam a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, definida por $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$. Note-se que f é o quadrado da distância ao ponto $(1, 0)$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, deveremos resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(f + \lambda F) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda F) = 0 \\ F = 0\,, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2(x - 1) + \lambda = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 - \lambda \\ y(1 - \lambda) = 0 \\ x = y^2\,. \end{cases}$$

Da segunda equação teremos $y = 0$ ou $\lambda = 1$. Fazendo $y = 0$, da terceira equação obtemos $x = 0$. Por outro lado, se $\lambda = 1$, da primeira equação vem $x = \frac{1}{2}$ e, da terceira, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, os pontos de estacionaridade da função $f + \lambda F$ são: $(0, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Sendo $f(0, 0) = 1$ e $f(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{4}$, concluimos que os pontos $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ são os que se encontram mais próximos de $(1, 0)$.