

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 10 (a entregar na semana de 20/11/2006)

Considere a função $f(x, y, z) = e^x yz$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0, 0) = (0, 1, 2)$ e

$$Dg(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada direccional $D_{\vec{v}}(f \circ g)(0, 0)$ em que $\vec{v} = (1, 2)$.

Resolução

Pelo Teorema da Função Composta temos

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(0, 0) &= Df(g(0, 0))Dg(0, 0) \\ &= Df(0, 1, 2)Dg(0, 0) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1, 2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1, 2) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 2) \right] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = e^x y$, então

$$D(f \circ g)(0, 0) = [2 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [8 \quad 13].$$

Sendo $\|v\| = \sqrt{5}$, obtemos

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}(f \circ g)(0, 0) &= D(f \circ g)(0, 0) \frac{\vec{v}}{\|v\|} \\ &= [8 \quad 13] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{8 + 26}{\sqrt{5}} = \frac{34\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$