Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 12 (a entregar na semana de 04/12/2006)

1. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$.
   a) Determine os pontos de estacionaridade de f e classifique-os.
   b) Mostre que a função f tem máximo e mínimo absolutos no conjunto definido por $x^2+y^2 \leq 2$, e determine-os.
2. Mostre que a equação $x + e^{y^2+xz^2} = 1$ define x como função de y e de z em alguma vizinhança do ponto $(0,0,1)$. Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial x}{\partial y}(0,1)$ e $\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,1)$.

Resolução

1. a) Dado que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2 = x(2+3x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \end{cases}$$

os pontos de estacionaridade são dados pelas soluções das equações

$$\begin{cases} x(2+3x) = 0 \\ 2y = 0, \end{cases}$$

ou seja, são os pontos $(0,0)$ e $(-\frac{2}{3}, 0)$.
Para os classificar devemos analisar a matriz das derivadas parciais de f de ordem dois (matriz Hessiana de f, $H(x,y)$). Sendo

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

temos

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad H(-\frac{2}{3}, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim $H(0,0)$ é definida positiva e, portanto, $(0,0)$ é um ponto de mínimo de f. A matriz $H(-\frac{2}{3},0)$ é indefinida e, portanto, $(-\frac{2}{3},0)$ não é extremo de f.

   b) O conjunto D definido pela equação $x^2+y^2 \leq 2$ é limitado e fechado, ou seja, compacto e, sendo f uma função contínua, pelo Teorema de Weierstrass concluímos que f tem máximo e mínimo absolutos em D.
Note-se que a origem $(0,0)$ é um ponto do interior do conjunto D e $f(0,0) = 0$.
Na fronteira do conjunto D, ou seja para $x^2+y^2 = 2$, temos $f(x,y) = 2 + x^3$.
Sabendo que $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, na fronteira de D teremos

$$2 - 2\sqrt{2} = f(-\sqrt{2}, 0) \leq f(x,y) \leq f(\sqrt{2},0) \leq 2 + 2\sqrt{2}.$$

Assim, concluímos que $(-\sqrt{2},0)$ é o mínimo absoluto de f em D e $(\sqrt{2},0)$ é o ponto de máximo absoluto de f em D.

2. Seja $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ a função de classe C^1 definida por $F(x,y,z)=x+e^{y^2+xz^2}-1$.

Note-se que $F(0,0,1)=0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0,1)=1+z^2e^{y^2+xz^2}{}_{|(0,0,1)}=2\neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, concluímos que a equação $x+e^{y^2+xz^2}=1$ define x como função de y e de z em alguma vizinhança do ponto $(0,0,1)$, ou seja, nessa vizinhança temos

$$F(x,y,z)=0\Leftrightarrow x=x(y,z)$$

e, portanto

$$F(x(y,z),y,z)=0.$$

Derivando em ordem a y e a z obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1)\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)+\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)=0,\\ \frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1)\frac{\partial x}{\partial z}(0,1)+\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)=0.\end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)&=2ye^{y^2+xz^2}{}_{|(0,0,1)}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)&=2xze^{y^2+xz^2}{}_{|(0,0,1)}=0,\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)&=-\frac{0}{2}=0,\\ \frac{\partial x}{\partial z}(0,1)&=-\frac{0}{2}=0.\end{aligned}$$