Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 2 (a entregar na semana de 25/09/2006)

1. Calcule a primitiva da função $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}$ que se anula em $x = 2$.

2. Determine a função que verifica as condições seguintes

$$f'(x) = x \log x \ ; \ f(1) = 0.$$

Resolução

1. Consideremos seguinte substituição de variável: $t = \sqrt{x+2}$, ou seja, $x = t^2 - 2$. Assim, temos,

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\, dx = \int \frac{2t}{(t^2-1)t}\, dt = \int \frac{2}{t^2-1}\, dt.$$

Sendo $\dfrac{2}{t^2-1} = \dfrac{2}{(t-1)(t+1)}$ uma função racional, a respectiva primitiva pode ser determinada por decomposição em fracções simples. É fácil concluir que

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

e, portanto,

$$\int \frac{2}{t^2-1}\, dt = \log(t-1) - \log(t+1) + K.$$

em que K é uma constante.
Dado que $t = \sqrt{x+2}$, temos

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\, dx = \log(\sqrt{x+2} - 1) - \log(\sqrt{x+2} + 1) + K$$

e, fazendo $x = 2$, obtemos $K = \log 3$.

2. Primitivando por partes, temos

$$f(x) = \int x \log x\, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + K$$

sendo K uma constante.
Dado que $f(1) = 0$, $K = \frac{1}{4}$.