

## Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

### Exercício-Teste 3 (a entregar na semana de 2/10/2006)

1. Calcule o integral  $\int_0^{\pi/4} \frac{3 \sin x + 3}{\cos x + \sin 2x} dx$ .

2. Uma partícula move-se ao longo do eixo dos  $x$ . A sua posição é dada no instante  $t$  pela função

$$f(t) = \int_0^{t^2} \frac{1 + \sin(\pi x) \cos(\pi x)}{1 + x^2} dx, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Calcule a velocidade da partícula no instante  $t = 1$ .

### Resolução

1. Temos

$$\int_0^{\pi/4} \frac{3 \sin x + 3}{\cos x + \sin 2x} dx = 3 \int_0^{\pi/4} \frac{1 \sin x + 1}{\cos x(1 + 2 \sin x)} dx.$$

Fazendo a substituição  $t = \sin x$  obtemos

$$3 \int_0^{\pi/4} \frac{1 \sin x + 1}{\cos x(1 + 2 \sin x)} dx = 3 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{t + 1}{\sqrt{1-t^2}(1+2t)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{3}{(1-t)(1+2t)} dt.$$

A função racional racional  $\frac{3}{(1-t)(1+2t)}$  decompõe-se na seguinte soma de fracções mais simples

$$\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+2t},$$

onde os coeficientes  $A$  e  $B$  devem verificar a igualdade  $A(1+2t) + B(1-t) = 3$ , logo conclui-se que  $A = 1$  e  $B = 2$ . Assim, o valor do integral é dado por

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{3}{(1-t)(1+2t)} dt &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-t} dt + \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{2}{1+2t} dt \\ &= [-\log|1-t| + \log|1+2t|]_0^{\sqrt{2}/2} = \left[ \log \left| \frac{1+2t}{1-t} \right| \right]_0^{\sqrt{2}/2} \\ &= \log \left( \frac{1+\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right). \end{aligned}$$

2. A velocidade da partícula em cada instante é dada pela derivada da função  $f$ . Como a função integranda é contínua, pelo Teorema Fundamental da Análise obtemos

$$f'(t) = \frac{1 + \sin(\pi t^2) \cos(\pi t^2)}{1 + t^4} 2t,$$

donde se conclui que no instante  $t = 1$  temos  $f'(1) = 1$  m/s.