

## Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

### Exercício-Teste 4 (a entregar na semana de 9/10/2006)

1. Calcule a área do conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < x\}$ .
2. Calcule o comprimento da linha representada pelo gráfico da função  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1 - x^2$ .
3. Calcule o volume da pirâmide quadrangular com vértices nos pontos

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

### Resolução

1. Dado que  $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  e  $b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  são as soluções da equação  $x = x^2 - 1$ , o conjunto será descrito por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b; x^2 - 1 < y < x\}$$

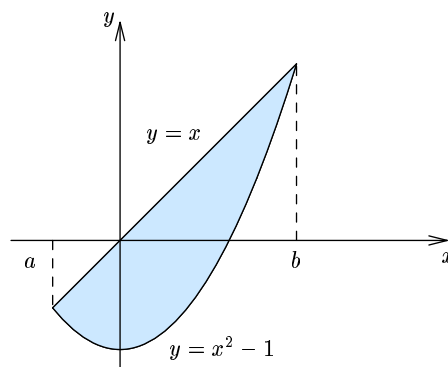


Figura 1:

tal como se representa na figura 1, e a respectiva área será dada pelo integral

$$\int_a^b (x - x^2 + 1) dx = \left[ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) + (b - a) \right] = \sqrt{5} \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 1 \right] = \frac{5\sqrt{5}}{6}.$$

2. Seja  $L$  o comprimento da linha. Sendo  $f$  uma função par, temos,

$$L = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

ou seja

$$L = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Efectuando a substituição  $x = \frac{1}{2} \sinh(t)$  e, tendo em conta que  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$  e  $\sinh(t) + \cosh(t) = e^t$ , teremos

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx \\
 &= \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \cosh^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (e^t + e^{-t})^2 dt \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} 2e^{2t} dt - \frac{1}{8} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (-2)e^{-2t} dt + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \\
 &= \frac{1}{8} (2 + \sqrt{5})^2 - \frac{1}{8(2 + \sqrt{5})^2} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}).
 \end{aligned}$$

3. A pirâmide encontra-se representada na figura 2 e o seu volume será dado pelo integral  $\int_0^1 f(z) dz$  em que  $f(z)$  é a área do quadrado que se encontra à altura  $z$ .

Da figura, é claro que  $f(z) = (1-z)^2$  e, portanto o volume da pirâmide será

$$\int_0^1 (1-z)^2 dz = \frac{1}{3}.$$

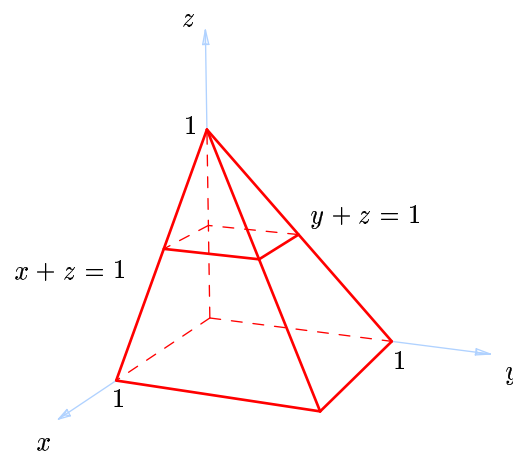


Figura 2: