

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 5 (a entregar na semana de 16/10/2006)

1. Calcule (sem recorrer a uma calculadora) $e^{-0.1}$ com erro inferior a 10^{-4} .
2. Determine a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{2-3x}$ em torno da origem e calcule o respectivo raio de convergência.
3. Estude os extremos e a concavidade da função

$$g(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2 + 1} dt.$$

Esboce o gráfico de g .

Resolução

1. Sabemos que $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, onde $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ é o polinómio de Taylor de ordem n no ponto a e $E_n(x)$ é o resto. Vamos usar a fórmula do resto de Lagrange para estimar o erro. Essa estimativa vai indicar-nos qual a ordem do polinómio de Taylor que devemos usar de modo a garantir que o erro seja inferior a 10^{-4} . Neste exemplo temos $f(x) = e^x$, $x = -0.1$ e $a = 0$.

Assim obtemos,

$$|E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (-10^{-1})^{n+1} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} 10^{-(n+1)},$$

com $c \in [-0.1, 0]$, logo $e^c < 1$. Portanto

$$|E_n(x)| < \frac{10^{-n-1}}{(n+1)!},$$

e vemos que basta escolher $n = 3$. Logo

$$\begin{aligned} e^{-0.1} &\approx f(0) + f'(0)(-0.1) + \frac{f''(0)}{2}(-0.1)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(-0.1)^3 \\ &= 1 - 0.1 + 0.005 - \frac{0.001}{6}. \end{aligned}$$

- 2.

$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} x^n.$$

O intervalo de convergência é dado pela condição $|\frac{3x}{2}| < 1$, ou seja, $|x| < \frac{2}{3}$.

3. Como a função integranda é contínua em \mathbb{R} , podemos aplicar o teorema Fundamental da Análise para concluir que g é diferenciável e $g'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Assim o único ponto de estacionaridade é $x = 0$. Para o classificar usamos a segunda derivada de g :

$$g''(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Temos $g''(0) = 1 > 0$ logo 0 é um ponto de mínimo. Analisando a segunda derivada podemos concluir também que $x = 1$ e $x = -1$ são pontos de inflexão de g , que a concavidade é voltada para cima no intervalo $] - 1, 1[$ e é voltada para baixo em $] - \infty, -1[\cup] 1, +\infty[$. Sendo $g(1) = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt = \ln \sqrt{2}$ um esboço do gráfico de g é dado na figura seguinte:

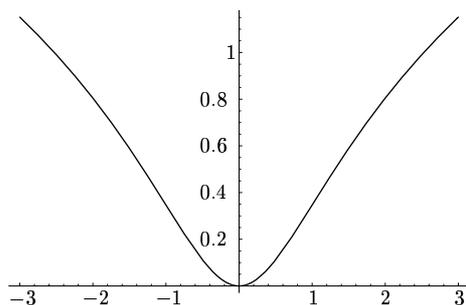


Figura 1: