Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 6 (a entregar na semana de 22/10/2006)

1. Determine a série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 5x + 2}$ em torno da origem e calcule o respectivo raio de convergência.

2. Mostre que a função $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - x^2}}$ é contínua no seu domínio e classifique-o topologicamente.

Resolução

1. Note-se que

$$\frac{1}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{1}{2(1 - \frac{x}{2})(1 - 2x)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1 - 2x}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2}}\right)$$

e, portanto,

$$f(x) = \frac{2}{3}\sum_{n \geq 0}(2x)^n - \frac{1}{6}\sum_{n \geq 0}(\frac{x}{2})^n.$$

Dado que as séries geométricas $\sum_{n \geq 0}(2x)^n$ e $\sum_{n \geq 0}(\frac{x}{2})^n$ convergem se $|2x| < 1$ e $|\frac{x}{2}| < 1$, respectivamente, a série de Taylor que representa $f(x)$ converge se $|x| < \frac{1}{2}$, ou seja, o respectivo raio de convergência é $\frac{1}{2}$.

2. O domínio da função é o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 > 0\}$.

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y) = y - x^2$. É claro que g é contínua e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) > 0\}$. Portanto, o conjunto D é aberto.

Dado que os pontos da forma $(0, R)$ com $R > 0$ pertencem a D, concluimos que D não é limitado.