Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 7 (a entregar na semana de 30/10/2006)

1. Calcule ou mostre que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2}$.
2. Considere a função $f(x,y) = x\log(xy)$.
   (a) Indique, justificando, em que pontos é que a função f é contínua.
   (b) Mostre que, sendo S uma recta que passa pela origem e contida no domínio D de f o limite de f na origem relativo ao conjunto S,
   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y),$$
   existe e com o mesmo valor para toda as rectas nas condições indicadas.
   (c) Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. (Sugestão: estude o limite relativo ao subconjunto de D formado pelos pontos que pertencem à linha de equação $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$).

Resolução

1. Dado que $x^2+y^2 \geq x^2$ e que $x^2+y^2 \geq y^2$, teremos
$$\left|\frac{x^3+2y^4}{x^2+y^2}\right| \leq |x| + 2|y|^2 \leq \|(x,y)\| + 2\|(x,y)\|^2$$
e, portanto, o limite existe e o seu valor é 0.

2. (a) A função f é contínua no seu domínio $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, pois a função $g(x,y) = \log xy$ é contínua neste domínio por ser a composta de funções contínuas ($g = \psi\circ\varphi$ onde $\psi(u) = \log u$ e $\varphi(x,y) = xy$) e portanto $f(x,y) = xg(x,y)$ é contínua pois é o produto de funções contínuas.
   (b) Consideremos as rectas que passam pela origem com declive m e que estão contidas no domínio D de f, ou seja, pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $y = mx$, com $m > 0$. O limite de f relativo a estas rectas é dado por
$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to0} x\log(x^2m) = \lim_{x\to0}\frac{\log(x^2m)}{1/x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{2xm}{x^2m}}{-1/x^2} = \lim_{x\to0} -2x = 0.\end{aligned}$$
   (c) Temos
$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=e^{-\frac{1}{x^2}}}} f(x,y) &= \lim_{x\to0} x\log(xe^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to0} x\log x + \lim_{x\to0} x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\log x}{1/x} + \lim_{x\to0} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to0} -\frac{1}{x}.\end{aligned}$$
   Logo este limite não existe e portanto o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ também não existe.