Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 8 (a entregar na semana de 06/11/2006)

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \sin(x^2+y^2).$$

a) Mostre que f é prolongável por continuidade a $(0,0)$ e, sendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o seu prolongamento, determine $F(0,0)$.

b) Calcule $\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$.

Resolução

a) Notamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1,$$

logo para mostrar que f é prolongável por continuidade à origem, basta mostrar que o seguinte limite existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Dado que $x^2 \leq x^2+y^2$ temos

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = |y| \leq \|(x,y)\|,$$

portanto o limite existe e é igual a 0. Concluimos que o prolongamento de f é dado por

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) Para calcular $\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)$ podemos simplesmente derivar f em ordem a x e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2)^2 - 2x^2y(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \sin(x^2+y^2) + \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} 2x \cos(x^2+y^2),$$

logo $\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 0$.

Para calcular a segunda derivada parcial precisamos de usar a definição

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(0,h) - F(0,0)}{h} = 0.$$