

Variedades. Linhas e Superfícies

1 Exemplos

Exemplo 1.1 - Uma Linha Recta em \mathbb{R}^2

Consideremos a linha recta em \mathbb{R}^2 definida por

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$$

Esta linha pode ser descrita de três formas distintas.

i) **Conjunto de nível** - Consideremos a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y) = x - y + 1$$

É uma função de classe C^1 que se anula precisamente sobre o conjunto M , ou seja

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

A derivada de F , dada pela matriz

$$DF(x, y) = \left[\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \right] = [1 \quad -1]$$

apresenta característica igual a um em qualquer ponto $(x, y) \in M$.

Assim, dizemos que o conjunto M é o *conjunto de nível* zero da função F .

Note-se que o vector $n = (1, -1)$ gera o subespaço linear de \mathbb{R}^2 descrito por

$$P = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$$

É uma linha recta em \mathbb{R}^2 perpendicular a M tal como se mostra na figura 1.

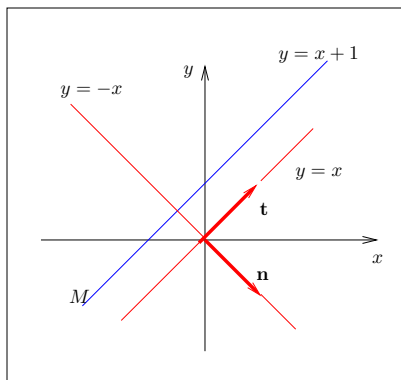


Figura 1: A recta $y = x + 1$

ii) **Gráfico** - Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x + 1$$

Facilmente se conclui que f é de classe C^1 e que M é o *gráfico* de f . De facto,

$$M = \{(x, x + 1) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

Sendo M o gráfico de f , em cada ponto $(x, f(x))$ o declive da tangente a M é dado pela derivada $f'(x) = 1$. Portanto, a cada ponto $(x, f(x)) \in M$ podemos associar o vector $t = (1, f'(x)) = (1, 1)$ que determina a direcção tangente a M nesse ponto, tal como se mostra na figura 1.

iii) **Parametrização** - Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x) = (x, x + 1)$$

Trata-se de uma função de classe C^1 . Facilmente se verifica que g é injectiva e que o conjunto M é a imagem da função g , ou seja,

$$M = \{(x, x + 1) : x \in \mathbb{R}\} = \{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = g(\mathbb{R})$$

Assim, g estabelece uma bijecção entre M e \mathbb{R} .

A derivada de g , dada pela matriz

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

apresenta característica igual a um.

Diz-se que a função g é uma *parametrização* de M com parâmetro x e que M tem dimensão um.

Note-se que o vector $t = Dg(x) = (1, 1)$ é ortogonal ao vector $DF(x, y) = (1, -1)$ definido acima. Para além disso, o subespaço linear gerado pelo vector $t = Dg(x) = (1, 1)$ é a linha recta dada pela equação $y = x$ que é paralela (tangente) à linha M tal como se mostra na figura 1.

Exemplo 1.2 - Uma circunferência em \mathbb{R}^2

Consideremos a circunferência de raio um e centro na origem de \mathbb{R}^2

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

i) **Conjunto de nível** - A circunferência M pode ser descrita como o *conjunto de nível* zero de uma função de classe C^1 . De facto, seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Trata-se de uma função de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e tal que

$$M = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$$

Sendo F de classe C^1 , a sua derivada

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}$$

apresenta característica igual a um em M . Note-se que o ponto $(0, 0)$ não pertence à circunferência M .

Consideremos o ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in M$. Então o vector $n = DF(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ gera o subespaço linear de \mathbb{R}^2 dado por

$$\{\lambda(1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

que coincide com a linha recta dada pela equação $y = x$ tal como se mostra na figura 2.

ii) **Gráfico** - Podemos também descrever a circunferência M como a união de gráficos de funções de classe C^1 . Consideremos as funções $f_i :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$; $i = 1, 2, 3, 4$, definidas da forma seguinte

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{1 - x^2} \\ f_2(x) &= -\sqrt{1 - x^2} \\ f_3(y) &= \sqrt{1 - y^2} \\ f_4(y) &= -\sqrt{1 - y^2} \end{aligned}$$

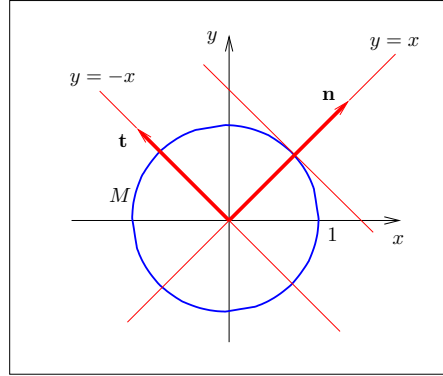


Figura 2: A circunferência $x^2 + y^2 = 1$

Estas funções são de classe C^1 e, se definirmos os conjuntos M_i , $i = 1, 2, 3, 4$, da forma seguinte

$$\begin{aligned} M_1 &= M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in]-1, 1[\} \\ M_2 &= M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in]-1, 1[\} \\ M_3 &= M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} = \{(\sqrt{1-y^2}, y) : y \in]-1, 1[\} \\ M_4 &= M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} = \{(-\sqrt{1-y^2}, y) : y \in]-1, 1[\} \end{aligned}$$

então, a circunferência M é a união dos *gráficos* das funções f_i , $i = 1, 2, 3, 4$, ou seja

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$$

iii) **Parametrização** - Sejam $g_i :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ as funções dadas por

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (x, \sqrt{1-x^2}) = (x, f_1(x)) \\ g_2(x) &= (x, -\sqrt{1-x^2}) = (x, f_2(x)) \\ g_3(y) &= (\sqrt{1-y^2}, y) = (f_3(y), y) \\ g_4(y) &= (-\sqrt{1-y^2}, y) = (f_4(y), y) \end{aligned}$$

Estas funções são de classe C^1 , injetivas e tais que

$$\begin{aligned} M_1 &= M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = g_1(]-1, 1[) \\ M_2 &= M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} = g_2(]-1, 1[) \\ M_3 &= M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} = g_3(]-1, 1[) \\ M_4 &= M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} = g_4(]-1, 1[) \end{aligned}$$

o que significa que cada uma das semicircunferências M_i , $i = 1, 2, 3, 4$, é a imagem de cada uma das funções g_i , $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente. Portanto, cada uma das funções g_i , $i = 1, 2, 3, 4$, estabelece uma bijecção entre cada um dos pedaços M_i , $i = 1, 2, 3, 4$, e o intervalo aberto $]-1, 1[$. A cada um dos conjuntos M_i chamamos *vizinhança de coordenadas*.

Facilmente se verifica que cada matriz Dg_i tem característica igual a um. Assim, as funções g_i parametrizam M .

Como exemplo, consideremos o ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in M_1$ e a parametrização g_1 . Note-se que $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = g_1(\frac{\sqrt{2}}{2})$. A derivada

$$Dg_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

apresenta característica igual a um.

Designemos por T o espaço gerado pelo vector $t = Dg_1(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (1, -1)$, ou seja,

$$T = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$$

e consideremos a linha recta paralela a T e que passa pelo ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Da observação da figura 2, constatamos que esta linha recta é tangente à circunferência no ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Note-se também que o vector $t = Dg_1(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (1, -1)$ e o vector $n = DF(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ são ortogonais.

A simetria apresentada pela circunferência M leva-nos a considerar coordenadas polares (r, θ) em \mathbb{R}^2 .

Sendo $r^2 = x^2 + y^2$, a circunferência M pode ser descrita pela equação $r = 1$.

Consideremos as funções $\gamma_1 :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\gamma_2 :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\begin{aligned}\gamma_1(\theta) &= (\cos \theta, \sin \theta) \\ \gamma_2(\theta) &= (\cos \theta, \sin \theta)\end{aligned}$$

São funções de classe C^1 , injectivas e tais que a união das respectivas imagens é a circunferência M

$$\begin{aligned}M \setminus \{(1, 0)\} &= \gamma_1(]0, 2\pi[) \\ M \setminus \{(-1, 0)\} &= \gamma_2(]-\pi, \pi[)\end{aligned}$$

Note-se que a derivada de qualquer uma destas duas funções é dada pelo vector $(-\sin \theta, \cos \theta)$ que não se anula porque $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, ou seja, as funções γ_1, γ_2 parametrizam M .

Para o ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, temos $\theta = \pi/4$ e

$$D\gamma_1(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

que gera o subespaço de \mathbb{R}^2 dado pela equação $y = -x$ e que é tangente a M no ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Exemplo 1.3 - Uma Parábola em \mathbb{R}^2

Seja M a parábola em \mathbb{R}^2 dada por

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

i) **Conjunto de nível** - Seja $F :]-1, 1[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x, y) = y - x^2$$

Trata-se de uma função de classe C^1 tal que

$$\begin{aligned}M &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\} = \{(x, x^2) : x \in]-1, 1[\} \\ &= \{(x, y) : F(x, y) = 0\}\end{aligned}$$

A derivada de F

$$DF(x, y) = \left[\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \right] = [-2x \quad 1]$$

apresenta característica um, ou seja, M é o conjunto de nível zero de F .

Por exemplo, no ponto $(0, 0)$ a derivada $n = DF(0, 0) = (0, 1)$ gera o subespaço que coincide com o eixo y tal como se mostra na figura 3.

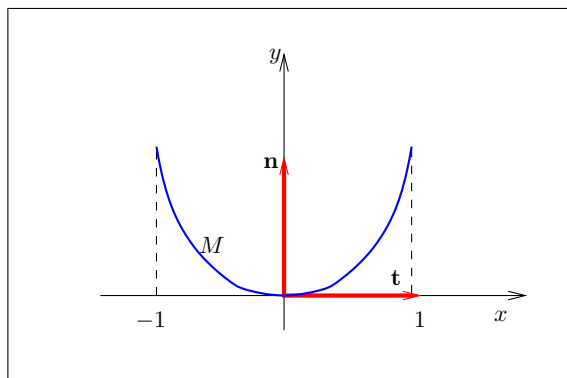


Figura 3: A parábola $y = x^2$

ii) **Gráfico** - Consideremos a função de classe C^1 , $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2$$

Então M é o gráfico de f

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\} = \{(x, x^2) : x \in]-1, 1[\}$$

Sendo f de classe C^1 , a sua derivada $f'(x)$ dá o declive da recta tangente ao gráfico de f em x , ou seja, a recta tangente a M no ponto $(x, f(x))$ é paralela à linha recta gerada pelo vector $(1, f'(x))$.

Por exemplo, no ponto $(0, 0)$ o vector $t = (1, f'(x)) = (1, 0)$ gera o eixo x que, de facto, é tangente a M no ponto $(0, 0)$ como se pode constatar da observação da figura 3.

iii) **Parametrização** - Consideremos a função $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x) = (x, x^2) = (x, f(x))$$

Trata-se de uma função de classe C^1 e tal que

$$M = \{(x, x^2) : x \in]-1, 1[\} = g(]-1, 1[)$$

Por outro lado, se $x_1 \neq x_2$ então $g(x_1) \neq g(x_2)$. Portanto g é injectiva, ou seja, a função g estabelece uma bijecção entre M e o intervalo $]-1, 1[$ em \mathbb{R} .

A derivada

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix}$$

tem característica um, ou seja, g é uma parametrização de M .

Note-se que

$$Dg(x) = (1, f'(x))$$

e, portanto, o vector $Dg(x)$ tem a direcção da tangente a M no ponto $(x, f(x)) = g(x)$.

Por exemplo, para $x = 0$, a derivada

$$t = Dg(0) = (1, 0)$$

gera o eixo x que é tangente a M no ponto $(0, 0) = g(0)$ tal como se constata na figura 3.

Exemplo 1.4 - Uma Linha Recta em \mathbb{R}^3

Consideremos a linha recta M em \mathbb{R}^3 definida pelas equações

$$\begin{aligned}x &= y \\ z &= 1\end{aligned}$$

i) **Conjunto de nível** - Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (x - y, z - 1)$$

Trata-se de uma função de classe C^1 e tal que

$$M = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = (0, 0)\}$$

A derivada

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz com característica igual a dois porque os vectores $n_1 = (1, -1, 0)$, $n_2 = (0, 0, 1)$ que constituem as suas duas linhas são linearmente independentes, ou seja, M é o conjunto de nível $(0, 0)$ de F .

Note-se que

$$M = \{(x, y, z) = (x, x, 1) = x(1, 1, 0) + (0, 0, 1) : x \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto, os vectores $n_1 = (1, -1, 0)$, $n_2 = (0, 0, 1)$ são perpendiculares ao vector $(1, 1, 0)$, ou seja, perpendiculares a M como se mostra na figura 4.

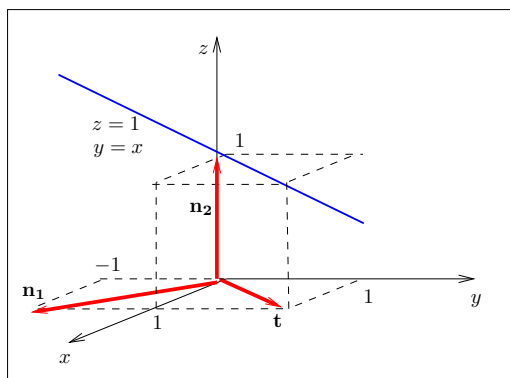


Figura 4: A recta $y = x$, $z = 1$

ii) **Gráfico** - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x) = (x, 1)$$

Trata-se de uma função de classe C^1 e tal que

$$M = \{(x, x, 1) = (x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

ou seja, M é o gráfico de f .

O vector $t = (1, f'(x)) = (1, 1, 0)$ apresenta a direcção da tangente a M tal como se apresenta na figura 4.

iii) **Parametrização** - Consideremos a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x) = (x, x, 1)$$

Esta função é de classe C^1 , injectiva e

$$M = \{(x, y, z) = (x, x, 1) = g(x) : x \in \mathbb{R}\} = g(\mathbb{R})$$

Portanto, g estabelece uma bijecção entre \mathbb{R} e M .

A derivada

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a um. O vector $t = (1, 1, 0)$ gera um subespaço de dimensão um em \mathbb{R}^3 dado pelas equações $x = y$; $z = 0$ e que é tangente a M como se mostra na figura 4.

Exemplo 1.5 Um Plano em \mathbb{R}^3

Seja P o plano em \mathbb{R}^3 definido pela equação

$$x + y + z = 3$$

e representado na figura 5.

i) **Conjunto de nível** - Consideremos a função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = x + y + z - 3$$

Então F é de classe C^1 e

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$$

ou seja, P é o conjunto de nível zero da função F .

A derivada

$$DF(x, y, z) = \left[\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \right] = [1 \quad 1 \quad 1]$$

tem característica igual a um.

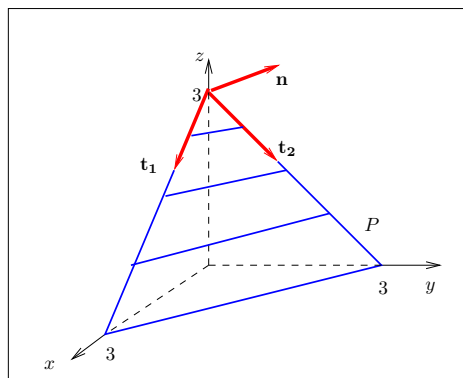


Figura 5: O plano $x + y + z = 3$

Note-se que o vector $n = DF(x, y, z) = (1, 1, 1)$ é ortogonal ao plano P . De facto, o plano P pode ser descrito da forma seguinte

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y, 3 - x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 0, 3) + x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e os vectores $t_1 = (1, 0, -1)$; $t_2 = (0, 1, -1)$ são ortogonais ao vector $DF(x, y, z) = (1, 1, 1)$ como se mostra na figura 5.

- ii) **Gráfico** - Da equação $x + y + z = 3$ e resolvendo em ordem a z obtemos $z = 3 - x - y$. Então consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 3 - x - y$$

Trata-se de uma função de classe C^1 e o respectivo gráfico é o conjunto P

$$P = \{(x, y, z) : z = 3 - x - y\} = \{(x, y, f(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Da interpretação geométrica da noção de derivada sabemos que os vectores

$$t_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}) = (1, 0, -1); \quad t_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}) = (0, 1, -1)$$

determinam o plano tangente a P em qualquer um dos seus pontos.

- iii) **Parametrização** - Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função dada por

$$g(x, y) = (x, y, 3 - x - y) = (x, y, f(x, y))$$

Esta função é de classe C^1 , injectiva e tal que $g(\mathbb{R}^2) = P$. Portanto, a função g estabelece uma bijecção entre \mathbb{R}^2 e P .

A derivada

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

tem duas colunas linearmente independentes, ou seja, tem característica igual a dois.

Note-se que estes dois vectores são ortogonais ao vector $DF(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Exemplo 1.6 - Uma circunferência em \mathbb{R}^3

Consideremos a circunferência M em \mathbb{R}^3 definida pelas equações

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

e apresentada na figura 6.

- i) **Conjunto de nível** - Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (z, x^2 + y^2 - 1)$$

Trata-se de uma função de classe C^1 e tal que

$$M = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = (0, 0)\}$$

o que significa que M é o conjunto de nível $(0, 0)$ de F .

A derivada

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois porque x e y não podem ser simultaneamente nulos. Note-se que em M se tem $x^2 + y^2 = 1$.

No ponto $(0, 1, 0)$ as linhas da matriz $DF(0, 1, 0)$ são os vectores $n_1 = (0, 0, 1)$ e $n_2 = (0, 2, 0)$ que são normais à circunferência, como se mostra na figura 6.

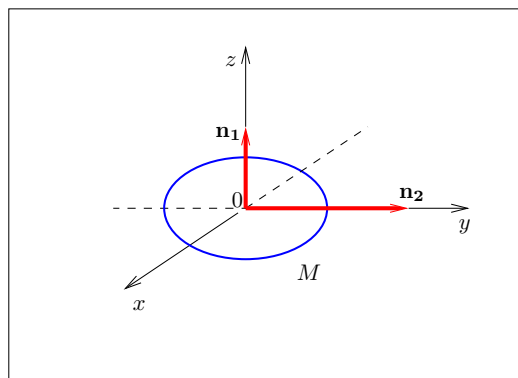


Figura 6: A Circunferência $z = 0; x^2 + y^2 = 1$

- ii) **Gráfico** - Notemos que da equação $x^2 + y^2 = 1$ obtemos $y = \sqrt{1-x^2}$ desde que $y > 0$ ou $y = -\sqrt{1-x^2}$ desde que $y < 0$. Do mesmo modo, $x = \sqrt{1-y^2}$ desde que $x > 0$ ou $x = -\sqrt{1-y^2}$ desde que $x < 0$. Assim, a circunferência M é descrita pela união

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$$

em que

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, y, z) : y = \sqrt{1-x^2}; z = 0; -1 < x < 1\} = M \cap \{y > 0\} \\ M_2 &= \{(x, y, z) : y = -\sqrt{1-x^2}; z = 0; -1 < x < 1\} = M \cap \{y < 0\} \\ M_3 &= \{(x, y, z) : x = \sqrt{1-y^2}; z = 0; -1 < y < 1\} = M \cap \{x > 0\} \\ M_4 &= \{(x, y, z) : x = -\sqrt{1-y^2}; z = 0; -1 < y < 1\} = M \cap \{x < 0\} \end{aligned}$$

ou seja, M é a união de quatro gráficos de funções de classe C^1 .

- iii) **Parametrização** - Notemos que

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, \sqrt{1-x^2}, 0) : -1 < x < 1\} \\ M_2 &= \{(x, -\sqrt{1-x^2}, 0) : -1 < x < 1\} \\ M_3 &= \{(\sqrt{1-y^2}, y, 0) : -1 < y < 1\} \\ M_4 &= \{(-\sqrt{1-y^2}, y, 0) : -1 < y < 1\} \end{aligned}$$

Assim, sejam as funções

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (x, \sqrt{1-x^2}, 1) ; -1 < x < 1 \\ g_2(x) &= (x, -\sqrt{1-x^2}, 1) ; -1 < x < 1 \\ g_3(y) &= (\sqrt{1-y^2}, y, 1) ; -1 < y < 1 \\ g_4(y) &= (-\sqrt{1-y^2}, y, 1) ; -1 < y < 1 \end{aligned}$$

São funções de classe C^1 , injectivas e tais que

$$M_i = g_i(]-1, 1[) ; i = 1, 2, 3, 4$$

Portanto, cada função g_i estabelece uma bijecção entre o intervalo aberto $] -1, 1[$ e cada M_i com $i = 1, 2, 3, 4$.

Cada uma das derivadas

$$Dg_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad Dg_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Dg_3(y) = \begin{bmatrix} \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad Dg_4(y) = \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a um, ou seja, as funções g_i parametrizam M .

Exemplo 1.7 - Uma esfera em \mathbb{R}^3

Consideremos a superfície esférica em \mathbb{R}^3 centrada na origem e de raio um dada por

$$S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e que se representa na figura 7.

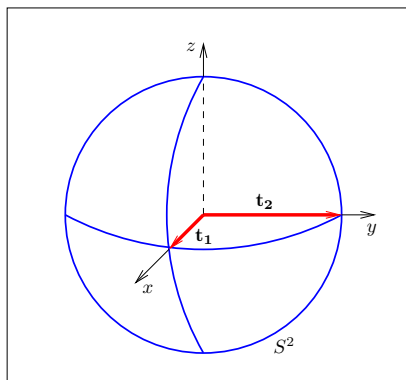


Figura 7: A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

i) **Conjunto de nível** - Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Esta função é de classe C^1 e tal que

$$S^2 = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$$

ou seja, a esfera S^2 é o conjunto de nível zero de F .

A derivada

$$DF(x, y, z) = [2x \quad 2y \quad 2z]$$

tem característica igual a um porque o vector $(2x, 2y, 2z)$ não pode ser nulo. De facto, em S^2 temos $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Note-se também que o vector $(2x, 2y, 2z)$ tem direcção radial, ou seja, é ortogonal a S^2 no ponto $(x, y, z) \in S^2$.

- ii) **Gráfico** - A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ pode ser resolvida em ordem a qualquer uma das variáveis como função das outras duas. Por exemplo, desde que $x > 0$, temos $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ e para $x < 0$ obtemos $x = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$. Assim, consideremos as funções

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sqrt{1 - x^2 - y^2}; & x^2 + y^2 < 1 \\ f_2(x, y) &= -\sqrt{1 - x^2 - y^2}; & x^2 + y^2 < 1 \\ f_3(x, z) &= \sqrt{1 - x^2 - z^2}; & x^2 + z^2 < 1 \\ f_4(x, z) &= -\sqrt{1 - x^2 - z^2}; & x^2 + z^2 < 1 \\ f_5(y, z) &= \sqrt{1 - y^2 - z^2}; & y^2 + z^2 < 1 \\ f_6(y, z) &= -\sqrt{1 - y^2 - z^2}; & y^2 + z^2 < 1 \end{aligned}$$

e os respectivos gráficos

$$\begin{aligned} G_1 = S^2 \cap \{z > 0\} &= \{(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}); & x^2 + y^2 < 1\} \\ G_2 = S^2 \cap \{z < 0\} &= \{(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}); & x^2 + y^2 < 1\} \\ G_3 = S^2 \cap \{y > 0\} &= \{(x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z); & x^2 + z^2 < 1\} \\ G_4 = S^2 \cap \{y < 0\} &= \{(x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z); & x^2 + z^2 < 1\} \\ G_5 = S^2 \cap \{x > 0\} &= \{(\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z); & y^2 + z^2 < 1\} \\ G_6 = S^2 \cap \{x < 0\} &= \{(-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z); & y^2 + z^2 < 1\} \end{aligned}$$

Então, a esfera S^2 é união de seis gráficos de funções de classe C^1 .

- iii) **Parametrização** - Sejam as funções

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}); & x^2 + y^2 < 1 \\ g_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}); & x^2 + y^2 < 1 \\ g_3(x, z) &= (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z); & x^2 + z^2 < 1 \\ g_4(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z); & x^2 + z^2 < 1 \\ g_5(y, z) &= (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z); & y^2 + z^2 < 1 \\ g_6(y, z) &= (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z); & y^2 + z^2 < 1 \end{aligned}$$

Estas funções são de classe C^1 , injectivas e as suas imagens coincidem, respectivamente, com os conjuntos G_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Portanto, cada uma das funções g_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ estabelece uma bijecção (identificação) entre estes conjuntos e o disco de raio um e centro na origem de \mathbb{R}^2 .

A derivada de cada uma das funções g_i é uma matriz com três linhas e duas colunas e com característica igual a dois, ou seja, as duas colunas são vectores linearmente independentes. Por exemplo, se considerarmos o ponto $(0, 0, 1)$, então, $g_1(0, 0) = (0, 0, 1)$ e a respectiva derivada

$$Dg_1(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem duas colunas $t_1 = (1, 0, 0)$ e $t_2 = (0, 1, 0)$ linearmente independentes e que são ortogonais ao vector $DF(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$ (ver figura 7).

Note-se que o plano gerado pelos vectores t_1 e t_2 e que passa pelo ponto $(0, 0, 1)$ é dado pela equação $z = 1$ e é tangente a S^2 no ponto $(0, 0, 1)$.

Devido à sua simetria, a esfera S^2 pode ser descrita em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) através da equação

$$r = 1$$

Consideremos o conjunto

$$T =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$$

e as funções $g_1, g_2 : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por

$$\begin{aligned} g_1(\theta, \phi) &= (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\ g_2(\theta, \phi) &= (\cos \phi, \sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta) \\ g_3(\theta, \phi) &= (\sin \phi \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi \cos \theta) \end{aligned}$$

Então, as funções g_1, g_2 são de classe C^1 , injectivas e se definirmos

$$\begin{aligned} G_1 &= S^2 \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0 ; y = 0\} = g_1(T) \\ G_2 &= S^2 \setminus \{(x, y, z) : y \geq 0 ; z = 0\} = g_2(T) \\ G_3 &= S^2 \setminus \{(x, y, z) : z \geq 0 ; x = 0\} = g_3(T) \end{aligned}$$

cada uma das funções g_1, g_2, g_3 estabelece uma bijecção entre o conjunto $T \subset \mathbb{R}^2$ e G_1, G_2, G_3 , respectivamente.

A derivada

$$Dg_1(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta} & \frac{\partial g_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta} & \frac{\partial g_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \theta} & \frac{\partial g_3}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & -\sin \phi \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois, ou seja as colunas da matriz Dg são linearmente independentes porque no intervalo $]0, \pi[$ temos $\sin \phi \neq 0$. Do mesmo modo se conclui para g_2 e g_3 ou seja, g_1, g_2, g_3 parametrizam S^2 .

Exemplo 1.8 - Um Parabolóide em \mathbb{R}^3

Consideremos o parabolóide dado por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 ; z < 1\}$$

e que se representa na figura 8.

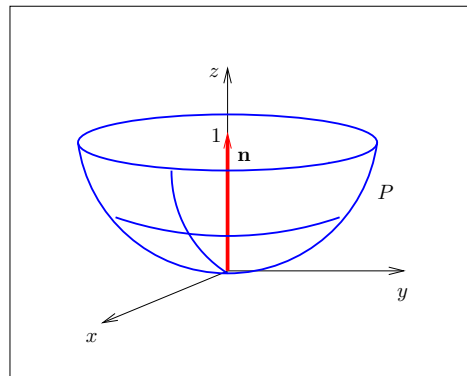


Figura 8: O parabolóide $z = x^2 + y^2 ; z < 1$

i) **Conjunto de nível** - A equação $z = x^2 + y^2$ sugere que podemos considerar a função

$$F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$$

definida no subconjunto aberto de \mathbb{R}^3

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 ; z < 1\}$$

Então, a função $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e P é o conjunto de nível zero de F :

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$$

A derivada

$$DF(x, y, z) = [-2x \quad -2y \quad 1]$$

tem característica igual a um.

Na figura 8 representa-se o vector $n = DF(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$.

ii) **Gráfico** - O conjunto P pode também ser descrito como o gráfico de uma função de classe C^1 . De facto, seja $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ em que

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

e definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Portanto

$$P = \{(x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in T\} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in T\}$$

Da interpretação geométrica da derivada, concluímos que os vectores $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$; $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$ determinam o plano tangente a P que passa pelo ponto $(x, y, f(x, y)) \in P$.

iii) **Parametrização** - Consideremos a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2) = (x, y, f(x, y))$$

É uma função de classe C^1 , injectiva e tal que

$$g(T) = P$$

ou seja, a função g estabelece uma bijecção entre $T \subset \mathbb{R}^2$ e P .

A derivada

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

é uma matriz com duas colunas linearmente independentes.

Note-se que as colunas desta matriz são ortogonais à linha da matriz $DF(x, y, z)$.

2 Teorema da Função Implícita

No que se segue, dados dois números inteiros $n, p \in \mathbb{N}$ com $p < n$, usaremos a seguinte decomposição de \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$$

e cada vector em \mathbb{R}^n será representado na forma (x, y) em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p}$.

Tal como nos exemplos anteriores, consideremos subconjuntos de \mathbb{R}^n definidos de uma das três formas seguintes:

- i) **Conjunto de nível** - Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e suponhamos que para cada um dos seus pontos existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $F : S \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^1 definida num aberto $S \subset \mathbb{R}^n$ tais que

$$M \cap V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : F(x, y) = 0\}$$

Para além disso, para cada ponto $(x, y) \in M \cap V$, a derivada $DF(x, y)$ é uma matriz com $(n - p)$ linhas linearmente independentes, ou seja a sua característica é igual a $(n - p)$.

Ao conjunto $M \cap V$ definido desta forma chamamos conjunto de nível zero da função F e o conjunto M é uma união de conjuntos de nível.

Trata-se de um conjunto definido por $(n - p)$ equações em \mathbb{R}^n .

Em \mathbb{R}^2 temos apenas um caso, em que $p = 1$, ou seja, $M \cap V$ é definido por uma equação apenas, $F(x, y) = 0$.

Em \mathbb{R}^3 há dois casos a considerar:

- a) $n - p = 1$ e $M \cap V$ é definido por uma equação, $F(x, y, z) = 0$.
b) $n - p = 2$ e $M \cap V$ é definido por duas equações

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z)) = (0, 0)$$

- ii) **Gráfico** - Suponhamos que para cada ponto de M existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^1 definida num aberto $D \subset \mathbb{R}^p$ tais que

$$M \cap V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y = f(x) ; x \in D\} = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

Assim, o conjunto $M \cap V$ é o gráfico da função f e M é uma união de gráficos.

- iii) **Parametrização** - Suponhamos que para cada ponto de M existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definida num aberto $T \subset \mathbb{R}^p$ tais que

$$M \cap V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : (x, y) = g(t) ; t \in T\} = \{g(t) : t \in T\}$$

Suponhamos também que a derivada $Dg(t)$ tem característica igual a p , ou seja, as p colunas da matriz $Dg(t)$ são linearmente independentes.

À função g chamamos parametrização de $M \cap V$ com p parâmetros $t \in T$. A $M \cap V$ chamamos vizinhança de coordenadas e M é uma união de vizinhanças de coordenadas.

Em todos os exemplos analisados foi possível relacionar estas três descrições de M através da resolução directa das equações envolvidas em cada caso. Da equação

$$F(x, y) = 0$$

resolvendo em ordem a y , obtemos

$$y = f(x)$$

e, conhecendo a função f , define-se a parametrização g da forma seguinte

$$g(x) = (x, f(x))$$

No entanto, a resolução de equações nem sempre é fácil e não existem métodos gerais de resolução de equações não lineares. O Teorema da Função Implícita garante, sob certas condições, a existência e a regularidade das soluções de tais equações.

Teorema 2.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : S \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ uma função de classe C^1 e seja $(a, b) \in S$ um ponto tal que $F(a, b) = 0$ e*

$$\det [D_y F(a, b)] \neq 0$$

Então, existe uma vizinhança V de (a, b) em \mathbb{R}^n , uma vizinhança D de a em \mathbb{R}^p e uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^1 com $b = f(a)$ e tal que

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x); \quad \text{em } V$$

A demonstração deste teorema pode ser vista em [1, 2].

Nota 2.1 Da equivalência

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x); \quad \text{em } V$$

obtemos a equação

$$F(x, f(x)) = 0$$

que permite calcular a derivada da função f . De facto, derivando em x obtemos

$$D_x F(x, f(x)) + D_y F(x, f(x)) Df(x) = 0$$

e, portanto

$$Df(x) = -[D_y F(x, f(x))]^{-1} D_x F(x, f(x))$$

Note-se que o Teorema da Função Implícita não oferece um método para a determinação da função f a partir da equação $F(x, y) = 0$. No entanto, a garantia de existência de tal função, bem como a sua regularidade, bastam para calcular a respectiva derivada.

Nota 2.2 É de salientar que a condição $\det D_y F(a, b) \neq 0$ significa que as linhas da matriz $DF(a, b)$ são linearmente independentes.

Portanto, um conjunto definido por um sistema de $(n-p)$ equações pode ser visto, localmente, como o gráfico de uma função.

Nota 2.3 Suponhamos que $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de uma vizinhança de coordenadas $M \cap V$ com $T \subset \mathbb{R}^p$, sendo $g(t_0) = (a, b)$. Sabendo que a característica da matriz derivada $Dg(t_0)$ é igual a p , sem perda de generalidade, suponhamos que $g(t) = (h(t), k(t))$, em que $h : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $k : T \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$, é tal que a característica da matriz $Dh(t_0)$ é igual a p . Assim, pelo Teorema

da Função Inversa, existe uma vizinhança U de t_0 e uma vizinhança D de a tais que a equação $x = h(t)$ tem solução única $t = h^{-1}(x)$. Portanto, da equação $y = k(t)$ concluimos que

$$y = k(h^{-1}(x))$$

e definindo $f(x) = k(h^{-1}(x))$ obtemos

$$(x, y) = g(t) \iff y = f(x), \text{ em } M \cap V$$

Portanto, as descrições de $M \cap V$ como conjunto de nível zero da função F ou como gráfico da função f ou através da parametrização g são equivalentes.

A um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ descrito de uma destas três formas chamamos **variedade** de dimensão p .

Note-se que a dimensão é igual ao número de parâmetros necessários para descrever M .

2.1 Exemplos

a) Consideremos a equação

$$x^2y + \text{sen}(x + y) = 0$$

Note-se que não é fácil decidir sobre se esta equação define uma das variáveis como função da outra.

Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe C^1 dada por

$$F(x, y) = x^2y + \text{sen}(x + y)$$

e consideremos o ponto $(0, \pi)$. Então $F(0, \pi) = 0$ e

$$DF(0, \pi) = \begin{bmatrix} 2xy + \cos(x + y) & x^2 + \cos(x + y) \end{bmatrix}_{x=0, y=\pi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, dado que $\frac{\partial F}{\partial y}(0, \pi) = -1$, existe uma vizinhança V de $(0, \pi)$, uma vizinhança U da origem em \mathbb{R} e uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f(0) = \pi$ e

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x); \text{ em } V$$

Para além disso, temos

$$f'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, \pi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, \pi)} = -\frac{-1}{-1} = -1$$

b) A equação

$$x^3z^2 - z^3yx = 0$$

define implicitamente z como função de (x, y) em alguma vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$.

Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe C^1 definida por

$$F(x, y, z) = x^3z^2 - z^3yx$$

Note-se que $F(1, 1, 1) = 0$. Sendo

$$DF(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 3x^2z^2 - z^3y & -z^3x & 2x^3z - 3z^2yx \end{bmatrix}_{x=1, y=1, z=1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e, portanto

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = -1$$

concluimos que existe uma vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$ em que a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente z como função de (x, y) . Designemos por $f(x, y)$ essa função. Então, nessa vizinhança temos $F(x, y, f(x, y)) = 0$ e derivando em x , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

e, portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -\frac{2}{-1} = 2$$

Note-se que para o ponto $(0, 0, 0)$ temos

$$DF(0, 0, 0) = [0 \quad 0 \quad 0]$$

e, portanto nada podemos concluir através do teorema da função implícita.

No entanto, analisando a equação, obtemos

$$xz^2(x - zy) = 0 \iff x = 0 \vee z = 0 \vee x = zy$$

e, portanto, em torno da origem não é possível exprimir nenhuma das variáveis como função das outras.

c) O sistema de equações

$$\begin{aligned} xu + yv^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

define implicitamente (u, v) como funções de (x, y) em torno do ponto $(1, 1, 1, 1)$.

Consideremos a função $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, u, v) = (xu + yv^2, xu^3 + y^2v^4)$$

É uma função de classe C^1 tal que $F(1, 1, 1, 1) = (2, 2)$ e a respectiva derivada no ponto $(1, 1, 1, 1)$ é dada por

$$DF(1, 1, 1, 1) = \begin{bmatrix} u & vu^2 & x + 2yvu & yu^2 \\ u^3 & 2yv^4 & 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{bmatrix}_{x=1, y=1, u=1, v=1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e, portanto

$$\det D_{uv}F(1, 1, 1, 1) = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 9$$

O teorema da função implícita garante que localmente em torno do ponto $(1, 1, 1, 1)$ temos $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$

Derivando a função F em x , obtemos

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x} + u + y \frac{\partial v}{\partial x} u^2 + 2yvu \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ 3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, no ponto $(1, 1, 1, 1)$, temos o sistema

$$\begin{aligned} 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -1 \\ 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} &= -1 \end{aligned}$$

de onde concluímos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{3}$$

3 Espaço Tangente e Espaço Normal

Seja $M \cap V$ uma vizinhança de coordenadas e seja $(x, y) \in M \cap V$. Então, temos

$$F(x, y) = 0$$

e

$$(x, y) = g(t)$$

Portanto,

$$F(g(t)) = 0$$

e, por derivação

$$DF(g(t))Dg(t) = 0$$

o que significa que as linhas da matriz $DF(x, y)$ são ortogonais às colunas da matriz $Dg(t)$.

De seguida, veremos que as derivadas $DF(x, y)$ e $Dg(t)$ fornecem informação geométrica importante sobre a variedade M , como sugerem os exemplos apresentados acima.

Seja z um ponto em M , $v \neq 0$ um vector em \mathbb{R}^n e $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $\gamma(t) \in M$, $\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[$ e

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= z \\ \gamma'(0) &= v\end{aligned}$$

A um vector $v \in \mathbb{R}^n$ nestas condições chamamos **vector tangente** a M no ponto z . Note-se que γ é um caminho regular e a respectiva imagem é uma linha sobre M .

Ao conjunto dos vectores tangentes a M no ponto z chamamos **espaço tangente** a M no ponto z e passaremos a designá-lo pelo símbolo $T_z M$.

Seja v um vector tangente a M no ponto $z \in M$. Então

$$F(\gamma(t)) = 0$$

e derivando obtemos

$$DF(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

e para $t = 0$

$$DF(z)v = 0$$

que significa que o vector v é ortogonal ao espaço gerado pelas linhas da matriz $DF(z)$.

Seja $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que $T \subset \mathbb{R}^p$, uma parametrização de uma vizinhança de coordenadas $M \cap V$ do ponto $z \in M$, sendo $z = g(t)$. Consideremos cada uma das p colunas da derivada $Dg(t)$ e que designaremos por $D_1g(t), D_2g(t), \dots, D_pg(t)$, respectivamente.

Seja $v = D_ig(t)$ e consideremos a função definida num intervalo aberto de \mathbb{R} contendo $s = 0$ e dada por $\gamma(s) = g(t + s\vec{e}_i)$, em que \vec{e}_i é o i -ésimo vector unitário da base canónica de \mathbb{R}^n .

Então, γ é de classe C^1 e

$$\gamma(0) = g(t) = z ; \quad \gamma'(0) = D_ig(t) = v$$

o que significa que a coluna $D_ig(t)$ é um vector tangente a M no ponto z .

O espaço tangente a M no ponto $z = g(t)$ é gerado pelas colunas da matriz $Dg(t)$.

Por outro lado, o espaço gerado pelas colunas da matriz $Dg(t)$ é ortogonal ao espaço gerado pelas linhas da matriz $DF(z)$.

Ao espaço dos vectores ortogonais ao espaço tangente a M no ponto z chamamos **espaço normal** a M no ponto z e passaremos a designá-lo pelo símbolo $T_z M^\perp$. Sendo ortogonal ao espaço tangente, tem dimensão $(n - p)$.

O espaço normal a M no ponto z é gerado pelas linhas da matriz $DF(z)$.

4 Aplicações

4.1 Extremos Condicionados. Exemplos

Consideremos, como exemplo, o problema de determinar o ponto pertencente à circunferência de raio igual a um e centro na origem de \mathbb{R}^2 e que se encontra mais próximo do ponto $(1, 1)$.

A circunferência é uma variedade de dimensão um, descrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$, ou seja é o nível zero da função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

O ponto de coordenadas (x, y) mais próximo de $(1, 1)$ é certamente o que minimiza a distância mútua, ou seja, minimiza a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

Portanto, o problema consiste em determinar os mínimos da função $f(x, y)$ sujeitos à condição de pertencerem à circunferência descrita pela equação $F(x, y) = 0$.

Note-se que f é de classe C^1 e que o seu único ponto de estacionaridade é o ponto $(1, 1)$ que não pertence à circunferência. Portanto, a determinação dos pontos de estacionaridade de f não permite chegar à solução do problema.

Seja (a, b) o ponto de mínimo da função f e seja $\gamma :] - \epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização de um arco da circunferência tal que

$$\gamma(0) = (a, b)$$

Assim, a função composta $f \circ \gamma :] - \epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ deverá apresentar um mínimo em $t = 0$, ou seja, teremos

$$Df(\gamma(0))\gamma'(0) = 0$$

Portanto, o vector $Df(a, b)$ deve ser ortogonal ao vector $\gamma'(0)$ que é tangente à circunferência no ponto (a, b) , ou, equivalentemente, o vector $Df(a, b)$ deve pertencer ao espaço normal à circunferência no ponto (a, b) . Sabendo que o espaço normal à circunferência no ponto (a, b) é gerado pelas linhas da matriz $DF(a, b)$, deve existir um escalar (multiplicador de Lagrange) λ tal que

$$Df(a, b) = -\lambda DF(a, b)$$

ou seja

$$D(f + \lambda F)(a, b) = 0$$

Concluimos então que o ponto (a, b) com $F(a, b) = 0$ deve ser um ponto de estacionaridade da função

$$g = f + \lambda F$$

Portanto, para determinar o ponto (a, b) devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} Dg(a, b) = 0 \\ F(a, b) = 0 \end{cases}$$

A este procedimento chamamos método dos multiplicadores de Lagrange.

Para o nosso exemplo temos

$$g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

e, portanto

$$\begin{aligned}2(x-1) + 2\lambda x &= 0 \\2(y-1) + 2\lambda y &= 0 \\x^2 + y^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

Para $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ obtemos, das duas primeiras equações,

$$\frac{x-1}{x} = \frac{y-1}{y}$$

ou seja $x = y$ e, da terceira concluímos que

$$(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Note-se que para $\lambda = 0$ obtemos $(a, b) = (1, 1)$ que não pertence à circunferência.

Seja $f(x, y) = y + x - 1$ e consideremos o problema da determinação do máximo e mínimo absolutos de f sobre o conjunto definido por $x^2 + y^2 \leq 2$.

Seja

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Sendo D compacto e f contínua, sabemos que f tem máximo e mínimo absolutos em D . Sobre o interior de D , os extremos de f podem ser determinados recorrendo aos pontos de estacionaridade de f . Sobre a fronteira de D , ou seja, sobre a circunferência dada por $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ devemos recorrer ao método dos multiplicadores de Lagrange.

Sendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -1\end{aligned}$$

concluímos que f não tem pontos de estacionaridade.

Sobre a fronteira de D , consideremos o sistema

$$\begin{cases} Dg(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

em que $g(x, y) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$ e, portanto, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} = 1 + 2\lambda x &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -1 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2 &= 0\end{aligned}$$

e, portanto

$$2\lambda(x - y) = 0 \iff \lambda = 0 \vee y = x$$

Da primeira equação concluímos que $\lambda \neq 0$, ou seja, devemos ter $y = x$ e, da terceira equação obtemos os pontos

$$(-1, -1), (1, 1)$$

e, portanto, um deles é o máximo absoluto e o outro é o mínimo absoluto de f em D .

Mas, $f(-1, -1) = -3$; $f(1, 1) = 1$, ou seja, $(-1, -1)$ é o mínimo absoluto e $(1, 1)$ é o máximo absoluto de f em D .

Consideremos o conjunto definido pelas equações

$$\begin{aligned}z &= 1 \\x^2 + \frac{y^2}{4} &= 1\end{aligned}$$

e determinemos os pontos deste conjunto que se encontram mais próximos do ponto $(0, 1, 0)$.

Assim, pretendemos minimizar a função

$$f(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + z^2$$

sujeita à condição

$$F(x, y, z) = (z - 1, x^2 + \frac{y^2}{4} - 1) = (0, 0)$$

Como vimos acima, no ponto de mínimo, o vector $Df(x, y, z)$ pertence ao espaço normal à variedade definida por $F(x, y, z) = (0, 0)$. Sendo esse espaço gerado pelas linhas da matriz $DF(x, y, z)$, devemos considerar o seguinte sistema

$$\begin{aligned}Dg(x, y, z) &= 0 \\z - 1 &= 0 \\x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 &= 0\end{aligned}$$

em que

$$g(x, y, z) = f(x, y, z) + \alpha F_1(x, y, z) + \beta F_2(x, y, z)$$

Então temos

$$\begin{aligned}2x + 2\beta x &= 0 \\2(y - 1) + \frac{1}{2}\beta y &= 0 \\2z + \alpha &= 0 \\z - 1 &= 0 \\x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 &= 0\end{aligned}$$

Da primeira equação obtemos

$$x(1 + \beta) = 0 \iff x = 0 \vee \beta = -1$$

Para $x = 0$, da quarta e da quinta equações obtemos os pontos $(0, -2, 1)$ e $(0, 2, 1)$.

Para $\beta = -1$, da segunda equação obtemos

$$y = \frac{4}{4 + \beta} = \frac{4}{3}$$

e da quinta equação

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}, 1\right); \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}f(0, -2, 1) &= 10 \\f(0, 2, 1) &= 2 \\f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) &= \frac{15}{9} \\f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) &= \frac{15}{9}\end{aligned}$$

e, portanto, os pontos mais próximos são

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}, 1\right); \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$$

4.2 Área de uma superfície

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormada em \mathbb{R}^2 e consideremos o paralelogramo determinado por dois vectores $\{t_1, t_2\}$. É sabido, da Álgebra Linear, que a área do paralelogramo é dada pelo determinante da matriz cujas colunas são os vectores t_1, t_2 escritos na base $\{e_1, e_2\}$.

Por exemplo, considerando a base canónica em \mathbb{R}^2 , a área do paralelogramo definido pelos vectores $t_1 = (2, 0)$ e $t_2 = (1, 1)$ é dada por

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Consideremos dois vectores linearmente independentes $\{t_1, t_2\}$ em \mathbb{R}^3 e o paralelogramo por eles determinado. Note-se que este paralelogramo é um subconjunto do plano gerado pelos dois vectores t_1 e t_2 . Seja P esse plano.

Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicado a $\{t_1, t_2\}$ obtemos uma base ortonormada $\{e_1, e_2\}$ de P da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{t_1}{|t_1|} \\ e_2 &= \frac{v_2}{|v_2|} \end{aligned}$$

em que

$$v_2 = t_2 - \langle t_2, e_1 \rangle e_1$$

Note-se que $\langle v_2, e_1 \rangle = 0$ e, portanto

$$|v_2|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle = \langle t_2, t_2 \rangle - \langle t_2, e_1 \rangle^2 = |t_2|^2 - \langle t_2, e_1 \rangle^2$$

Assim, podemos exprimir t_1 e t_2 na base ortonormada $\{e_1, e_2\}$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} t_1 &= |t_1| e_1 \\ t_2 &= \langle t_2, e_1 \rangle e_1 + \sqrt{|t_2|^2 - \langle t_2, e_1 \rangle^2} e_2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} t_1 &= |t_1| e_1 \\ t_2 &= \frac{\langle t_2, t_1 \rangle}{|t_1|} e_1 + \sqrt{|t_2|^2 - \frac{\langle t_2, t_1 \rangle^2}{|t_1|^2}} e_2 \end{aligned}$$

e, portanto, a área do paralelogramo definido por t_1 e t_2 é o determinante

$$\det \begin{bmatrix} |t_1| & \frac{\langle t_2, t_1 \rangle}{|t_1|} \\ 0 & \sqrt{|t_2|^2 - \frac{\langle t_2, t_1 \rangle^2}{|t_1|^2}} \end{bmatrix} = \sqrt{|t_1|^2 |t_2|^2 - \langle t_2, t_1 \rangle^2}$$

Por outro lado, seja Δ a matriz cujas colunas são os vectores t_1 e t_2 . Então

$$\det \Delta^t \Delta = \begin{bmatrix} \langle t_1, t_1 \rangle & \langle t_1, t_2 \rangle \\ \langle t_2, t_1 \rangle & \langle t_2, t_2 \rangle \end{bmatrix} = |t_1|^2 |t_2|^2 - \langle t_2, t_1 \rangle^2$$

Assim, concluímos que a área do paralelogramo determinado pelos vectores t_1 e t_2 é dada por $\sqrt{\det \Delta^t \Delta}$.

Estas observações motivam a seguinte definição de área de uma variedade de dimensão 2 (superfície) em \mathbb{R}^3 .

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade de dimensão 2 e consideremos uma vizinhança de coordenadas $M \cap V$ e seja $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ a respectiva parametrização. Então

$$\text{vol}_2(M \cap V) = \int_T \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

4.3 Integral de um Campo Escalar sobre uma Variedade

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $M \subset S$ uma variedade de dimensão p e $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar. Seja $M \cap V$ uma vizinhança de coordenadas e $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização.

Define-se o integral do campo escalar ϕ sobre a vizinhança de coordenadas $M \cap V$ como sendo o integral

$$\int_{M \cap V} \phi = \int_T \phi(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

De seguida apresentam-se casos de campos escalares com interesse nas aplicações em que $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície dada por uma vizinhança de coordenadas com parametrização $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ sendo $g = (g_1, g_2, g_3)$.

- a) **Área:** Seja $\phi = 1$. Então, o integral de ϕ é a área de M

$$\text{vol}_2(M) = \int_M \phi = \int_T \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

- b) **Massa:** Suponhamos que M representa uma folha de um material com densidade de massa por unidade de área ϕ . Então, o integral de ϕ é a massa de M

$$\mathcal{M} = \int_M \phi = \int_T \phi(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

- c) **Centro de Massa:** Seja M uma folha de um material com densidade de massa α . Então, o centro de massa de M é o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ determinadas por

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_M x \alpha = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_T g_1(t) \alpha(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt \\ \bar{y} &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_M y \alpha = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_T g_2(t) \alpha(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt \\ \bar{z} &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_M z \alpha = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_T g_3(t) \alpha(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt \end{aligned}$$

- d) **Momento de Inércia relativo a uma linha recta:** Seja L uma linha recta e M uma folha de um material com densidade α . Então, o momento de inércia de M relativo a L é o integral

$$I_L = \int_M \alpha d_L^2 = \int_T \alpha(g(t)) d_L^2(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

em que d_L designa a distância à linha L .

4.4 Exemplos

i) Consideremos a superfície esférica de raio R e centrada na origem que designaremos por S^2 .

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

Seja $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função dada por

$$g(\theta, \phi) = (R \operatorname{sen} \phi \cos \theta, R \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, R \cos \phi)$$

em que

$$T =]0, 2\pi[\times]0, \pi[\subset \mathbb{R}^2$$

Então g é uma função de classe C^1 , injectiva, cuja derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -R \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & R \cos \phi \cos \theta \\ R \operatorname{sen} \phi \cos \theta & R \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -R \operatorname{sen} \phi \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois e

$$g(T) = S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 : y = 0 ; x \geq 0\} = S^2 \setminus N$$

ou seja, g é uma parametrização de $S^2 \setminus N$.

Note-se que

$$Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} R^2 \operatorname{sen}^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$$

e, portanto

$$\sqrt{\det Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi)} = R^2 \operatorname{sen} \phi$$

Sendo N uma semicircunferência sobre S^2 , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_2(S^2) = \operatorname{vol}_2(S^2 \setminus N) &= \int_T \sqrt{\det Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi)} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi R^2 \operatorname{sen} \phi d\phi \right) d\theta \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi d\phi \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

ii) Consideremos a superfície definida por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z < 1\}$$

Em coordenadas cilíndricas, M é descrita pela equação $z = \rho^2$.

Portanto, consideremos a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, \rho^2)$$

em que

$$T =]0, 1[\times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$$

Esta função é de classe C^1 , injectiva e a sua derivada

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta \\ 2\rho & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois. Para além disso,

$$g(T) = M \setminus \{(x, y, z) \in M : x \geq 0 ; y = 0\} = M \setminus N$$

Portanto, a função g é uma parametrização de $M \setminus N$.

Note-se que

$$Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} 1 + 4\rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\sqrt{\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta)} = \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}$$

Sendo N uma linha sobre M , temos,

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(M) = \text{vol}_2(M \setminus N) &= \int_T \sqrt{\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta)} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} \int_0^1 12\rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \\ &= \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

iii) Seja C a superfície cónica definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} = z < 1\}$$

Em coordenadas cilíndricas C é descrita pela equação $z = \rho$ e, portanto, tal como no exemplo anterior, consideremos a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho)$$

em que

$$T =]0, 1[\times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$$

Esta função é de classe C^1 , injectiva e a sua derivada

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois. Para além disso,

$$g(T) = M \setminus \{(x, y, z) \in M : x \geq 0 ; y = 0\} = M \setminus N$$

Portanto, a função g é uma parametrização de $M \setminus N$.

Note-se que

$$\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta) = \sqrt{2}\rho$$

Sendo N um segmento de recta sobre M , temos,

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(M) = \text{vol}_2(M \setminus N) &= \int_T \sqrt{\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta)} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{2}\rho d\rho \right) d\theta \\ &= \sqrt{2}\pi \int_0^1 2\rho d\rho \\ &= \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

iv) Consideremos a porção do plano definido por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 ; x > 0 ; y > 0 ; z > 0\}$$

e a respectiva parametrização $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

em que

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 ; 0 < y < 1 - x\}$$

Sendo

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(P) &= \int_T \sqrt{3} dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \sqrt{3} dy \right) dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (1-x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

v) Consideremos o toro com raios R e r definido por

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

ou seja, a superfície que se obtém fazendo rodar em torno do eixo z a circunferência no plano xz com centro em $(R, 0)$ e raio r e descrita pelo ângulo ϕ , contado a partir do plano $z = 0$ no sentido positivo. Designemos por θ o ângulo de rotação em torno do eixo z e medido a partir do eixo x no sentido positivo.

Seja

$$D = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < 2\pi\}$$

e $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, \phi) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi)$$

Facilmente se verifica que g é de classe C^1 e injectiva e a respectiva derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -(R + r \cos \phi) \sin \theta & -r \sin \phi \cos \theta \\ (R + r \cos \phi) \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ 0 & r \cos \phi \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois. Portanto, g é uma parametrização de

$$T^2 \setminus N$$

em que

$$N = \{(x, y, z) : z = 0\} \cup \{(x, y, z) : y = 0\}$$

Sendo N a união de duas linhas em T^2 , temos

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(T^2) = \text{vol}_2(T^2 \setminus N) &= \int_D \sqrt{\det Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi)} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} r(R + r \cos \phi) d\theta \right) d\phi \\ &= 4\pi^2 Rr \end{aligned}$$

vi) Consideremos a superfície dada por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1, 0 < z < 1\}$$

e que representa uma folha de um material com densidade de massa dada por

$$\alpha(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2z^2 + 1}}$$

Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) esta superfície é descrita pela equação $\rho^2 = z^2 + 1$ e, portanto, consideremos a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = ((\sqrt{z^2 + 1}) \operatorname{sen} \theta, (\sqrt{z^2 + 1}) \operatorname{cos} \theta, z)$$

em que

$$T = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi; 0 < z < 1\}$$

Então, g é de classe C^1 , injectiva e a respectiva derivada

$$Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} -(\sqrt{z^2 + 1}) \operatorname{sen} \theta & \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \operatorname{cos} \theta \\ (\sqrt{z^2 + 1}) \operatorname{cos} \theta & \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois, ou seja é uma parametrização de $C \setminus N$ em que

$$N = \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\}$$

A massa de C é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \int_C \alpha &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \alpha(g(\theta, z)) \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)} dz \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2z^2 + 1}} \sqrt{2z^2 + 1} dz \right) d\theta \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

A coordenada \bar{z} do centro de massa de C é dada por

$$\begin{aligned} \bar{z} = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_C z \alpha &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 g_3(\theta, z) \alpha(g(\theta, z)) \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)} dz \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 z dz \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Seja $d_z(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a distância ao eixo z . O momento de inércia de C relativo ao eixo z é dado por

$$\begin{aligned} I_z = \int_C \alpha d_z^2 &= \int_T \alpha(g(\theta, z)) d_L^2(g(\theta, z)) \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)} d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (z^2 + 1) dz \right) d\theta \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Referências

- [1] Luís T. Magalhães. Complementos de cálculo diferencial.
- [2] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, 1976.