Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício Teste 12

Enunciado:

Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $z = xy$, com $1 < x, y < 2$ e com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

Calcule o momento de inércia de S em relação ao eixo dos x.

Solução:

Utilizando x e y como coordenadas, temos que S é descrita pela parametrização

$$g(x,y) = (x, y, xy),$$

com $0 < x, y < 1$.

A derivada da parametrização g é dada pela matriz

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Temos então que, sendo $D_x g$ e $D_y g$ respectivamente a primeira e segunda colunas de Dg,

$$V(D_x, D_y g) = \sqrt{\det Dg^t Dg} = ||D_x g \times D_y g|| = \left(\det \begin{bmatrix} 1+y^2 & xy \\ xy & 1+x^2 \end{bmatrix}\right)^{1/2} = \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

O quadrado da distância do ponto (x,y,z) ao eixo dos x é dado por $d_x^2 = y^2 + z^2$, que em S é igual a $d_x^2 = y^2 + x^2y^2$. O momento de inércia de S em relação ao eixo dos x é então dado por

$$M = \int_1^2 \left(\int_1^2 \alpha(g(x,y)) d_x^2(x,y) V(D_x g, D_y g) dx \right) dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 y^2 dx \right) dy = 7/3.$$