Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 6

Um filamento eléctrico C, com densidade de carga eléctrica

$$\sigma(x, y, z) = \sqrt{5 - 8(x + 1)(y + 1)}$$

tem a configuração da intersecção das superfícies

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\} \text{ e } P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y + z = -1\}.$$

Calcule a carga eléctrica de C.

Resolução: A carga eléctrica do filamento é dada pelo integral de linha

$$q = \int_C \sigma.$$

Para calcular este integral de linha precisamos de determinar uma parametrização para a curva C. Comecemos por determinar a equação da projecção, C', de C no plano xOy:

$$\begin{aligned} \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = -1 - 2y - 2x \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad -1 - 2y - 2x = x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1. \end{aligned}$$

Portanto a projecção C' é uma circunferência de raio 1 centrada no ponto $(-1, -1, 0)$. Uma parametrização para C pode ser definida por

$$g(t) = (\cos(t) - 1, \operatorname{sen}(t) - 1, 3 - 2\cos(t) - 2\operatorname{sen}(t)), \;\; t \in [0, 2\pi].$$

Onde se usou o facto de que, quando t percorre o intervalo $[0, 2\pi]$, $(\cos(t) - 1, \operatorname{sen}(t) - 1, 0)$ percorre a projecção C' e que o único ponto de C por cima de $(\cos(t) - 1, \operatorname{sen}(t) - 1, 0)$ tem coordenada z dada por

$$z = -1 - 2(\operatorname{sen}(t) - 1) - 2(\cos(t) - 1) = 3 - 2\cos(t) - 2\operatorname{sen}(t).$$

Temos

$$\begin{aligned} g'(t) &= (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 2\operatorname{sen}(t) - 2\cos(t)) \\ ||g'(t)|| &= \sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) + (2\operatorname{sen}(t) - 2\cos(t))^2} = \sqrt{5 - 8\operatorname{sen}(t)\cos(t)} \\ \sigma(g(t)) &= \sqrt{5 - 8(x(g(t)) + 1)(y(g(t)) + 1)} = \sqrt{5 - 8\cos(t)\operatorname{sen}(t)}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} q = \int_0^{2\pi} \sigma(g(t))||g'(t)||dt &= \int_0^{2\pi} (5 - 8\cos(t)\operatorname{sen}(t))dt \\ &= [5t + 2\cos(2t)]_0^{2\pi} \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$