

Análise Matemática III
1º Semestre de 2000/2001

Exercício teste 8 (a entregar na aula prática da semana de 13/11)

Calcule

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy$$

onde

$$(P, Q) = \left(-y + \frac{1 - x^2 + y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \cos(x) + \frac{1 + x^2 - y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right)$$

e γ é a fronteira do quadrado

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$$

percorrida uma vez no sentido directo.

Solução: Pelo teorema de Green,

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \int \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin(x) + \frac{(2x - 2y)(1 + x^2 + y^2)^2 - 4x(1 + x^2 + y^2)(1 + x^2 - y^2 - 2xy)}{(1 + x^2 + y^2)^4};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 + \frac{(2y - 2x)(1 + x^2 + y^2)^2 - 4y(1 + x^2 + y^2)(1 - x^2 + y^2 - 2xy)}{(1 + x^2 + y^2)^4},$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -\sin(x) + 1 + \frac{4(x - y)(1 + x^2 + y^2) - 4(x + x^3 + xy^2 - y - yx^2 - y^3)}{(1 + x^2 + y^2)^3} \\ &= -\sin(x) + 1 \end{aligned}$$

e que portanto

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \int \int_S (-\sin(x) + 1) dx dy = 4$$

(já que $\sin(x)$ é ímpar e portanto o seu integral em $[-1, 1]$ é zero).

Note-se que o cálculo deste integral de linha pela definição seria bastante mais complicado.