Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 8 (a entregar na semana de 2/05/2006)

Seja n um inteiro positivo, e considere a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y_0, \ldots, y_n) = \sum_{i=0}^{n} y_i x^i = y_0 + y_1 x + \cdots + y_n x^n.$$

(a) Mostre que existem abertas $U \subseteq \mathbb{R}, V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e uma função $\psi : V \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ tais que

(i) $1 \in U$;
(ii) $\big(-1, 0, \ldots, 0, 1\big) \in V$ e
(iii) para $x \in U$ e $(y_0, \ldots, y_n) \in V$, tem-se $f(x, y_0, \ldots, y_n) = 0$ se e só se $x = \psi(y_0, \ldots, y_n)$.

(b) Calcule $\frac{\partial \psi}{\partial y_0}(-1, \ldots, 1)$.

Resolução

(a) Tem-se que f é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ e

$$\begin{aligned} f(1, -1, 0, \ldots, 0, -1) &= -1 + 1 = 0, \\ Df(x, y_0, \ldots, y_n) &= \left[\textstyle\sum_{i=1}^{n} i y_i x^{i-1} \quad 1 \quad x \quad \cdots \quad x^n\right], \\ Df(-1, -1, 0, \ldots, 0, -1) &= \begin{bmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como $n > 0$, a matriz

$$D_x f(1, -1, 0, \ldots, 0, 1) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 0, \ldots, 0, 1)\right] = \begin{bmatrix} n \end{bmatrix}$$

é não-singular.

Aplicando o teorema da função implícita, obtém-se (i) uma vizinhança aberta U de 1 em $\mathbb{R}$, (ii) uma vizinhança aberta V de $\big(-1, 0, \ldots, 0, 1\big)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ e (iii) uma função $\psi : V \to U$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

$$\{\big(x, (y_0, \ldots, y_n)\big) \in U \times V \mid f(x, y_0, \ldots, y_n) = 0\} = \{\big(x, (y_0, \ldots, y_n)\big) \in U \times V \mid x = \psi(y_0, \ldots, y_n)\}.$$

(b) Da alínea anterior, em alguma vizinhança de $(1, -1, 0, \ldots, 0, 1)$, tem-se

$$f\big(\psi(y_0, \ldots, y_n), y_0, \ldots, y_n\big) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y_0}\left(f\big(\psi(y_0, \ldots, y_n), y_0, \ldots, y_n\big)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_0}\left(y_0 + y_1 \psi(y_0, \ldots, y_n) + \cdots + y_n \psi(y_0, \ldots, y_n)^n\right) \\ &= 1 + y_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_0}(y_0, \ldots, y_n) + \cdots + y_n n \psi(y_0, \ldots, y_n)^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial y_0}(y_0, \ldots, y_n) \\ &= 1 + \left(y_1 + 2y_2 \psi(y_0, \ldots, y_n) + \cdots + n y_n \psi(y_0, \ldots, y_n)^{n-1}\right) \frac{\partial \psi}{\partial y_0}(y_0, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

e para $(y_0, \ldots, y_n) = (-1, 0, \ldots, 0, 1)$ temos $\frac{\partial \psi}{\partial y_0}(-1, 0, \ldots, 0, 1) = -1/n$.