

CDI-II

Funções Diferenciáveis

1 Funções Diferenciáveis. Derivadas Parciais

A noção de derivada é das mais importantes no estabelecimento de modelos matemáticos de fenómenos físicos, químicos, etc. Na prática esses modelos são dados em termos de equações envolvendo as taxas de variação das grandezas em jogo (c.f. [2, 3, 1]).

Recordemos que, dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diz-se que f é diferenciável num ponto a se existir o limite seguinte

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

a que chamamos derivada de f em a .

Teremos então,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - f'(a)h|}{|h|} = 0.$$

Fazendo $x = a + h$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tais que, se $|x - a| < \delta$ então

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| < \epsilon|x - a|.$$

Isto quer dizer que, perto do ponto a , o gráfico de f confunde-se com a recta de equação $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, cujo declive é precisamente a derivada $f'(a)$, tal como se ilustra na figura 1.

Note-se que a função real de variável real, $\mathbb{R} \ni h \mapsto f'(a)h \in \mathbb{R}$, é linear. Portanto, f é diferenciável em a se, de certo modo, for possível aproximar a diferença $f(a+h) - f(a)$ pela função linear $h \mapsto f'(a)h$.

Esta forma de descrever a noção de derivada em \mathbb{R} pode ser transposta para o caso das funções de várias variáveis.

Definição 1.1 Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se diferenciável num ponto $a \in \text{int}(D)$ se existir uma aplicação linear $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, denominada derivada de f em a , tal que

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h = o(h),$$

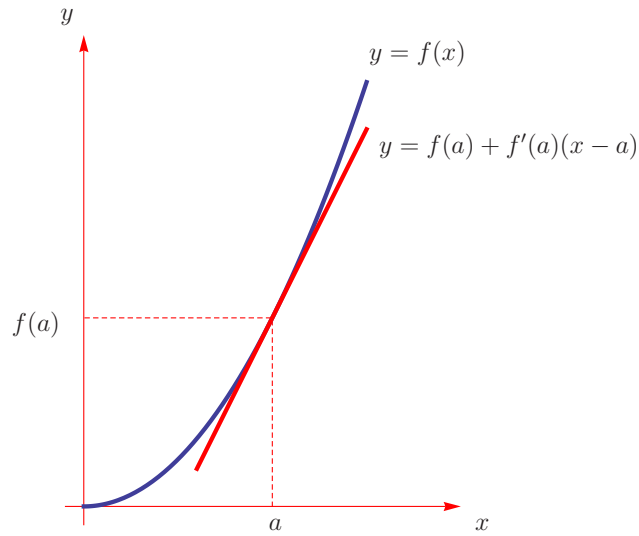


Figura 1: Derivada em \mathbb{R} . Tangente ao gráfico

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)h}{\|h\|} = 0$$

A transformação linear $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ deverá ser representada por uma matriz com m linhas e n colunas.

Para determinar essa matriz, seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Fazendo $h = te_k$ com $t \in \mathbb{R}$, teremos

$$f(a + te_k) - f(a) = Df(a)(te_k) + o(te_k)$$

e, sabendo que $Df(a)$ é uma aplicação linear, então

$$f(a + te_k) - f(a) = tDf(a)e_k + o(te_k),$$

ou seja,

$$\frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = Df(a)e_k + \frac{o(te_k)}{t}.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = Df(a)e_k.$$

Note-se que

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n); a + te_k = (a_1, a_2, \dots, a_k + t, \dots, a_n)$$

e a razão incremental

$$\frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)}{t}$$

obtem-se, fixando todas as coordenadas excepto a k -ésima.

Sendo $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(a + te_k) - f_1(a)}{t}, \dots, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_m(a + te_k) - f_m(a)}{t} \right).$$

Note-se também que o conjunto de pontos definido por $\{a + te_k : t \in \mathbb{R}\}$ é a recta que passa pelo ponto a e com a direcção do vector e_k .

Assim, a razão incremental $\frac{f_j(a + te_k) - f_j(a)}{t}$ é a taxa de variação da função escalar f_j na direcção e_k .

Definição 1.2 *Ao limite*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_j(a + te_k) - f_j(a)}{t}$$

chamamos **derivada parcial** de f_j , com $j = 1, 2, \dots, m$, no ponto a em ordem à variável x_k , com $k = 1, 2, \dots, n$.

Note-se também que para calcular a derivada parcial $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)$ devemos fixar todas as variáveis excepto x_k . De facto, temos

$$f_j(a + te_k) - f_j(a) = f_j(a_1, a_2, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f_j(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n).$$

Portanto, trata-se de calcular a derivada de uma função de uma variável real x_k .

Por outro lado, $Df(a)e_k$ é a k -ésima coluna da matriz que representa a derivada $Df(a)$. Portanto, a matriz que representa a derivada $Df(a)$ será

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \quad (1)$$

À matriz $Df(a)$ também se dá o nome de matriz **Jacobiana** de f .

No caso em que $m = 1$, ou seja, $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, então $Df(a)$ terá apenas uma linha

$$Df(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right]$$

e podemos representá-la na forma vectorial

$$Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

a que chamaremos **gradiente** de f em a .

Passaremos a designar este vector pelo símbolo $\nabla f(a)$, ou seja,

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Devemos notar que, no caso geral, a j -ésima linha da matriz Jacobiana é o gradiente da função coordenada f_j .

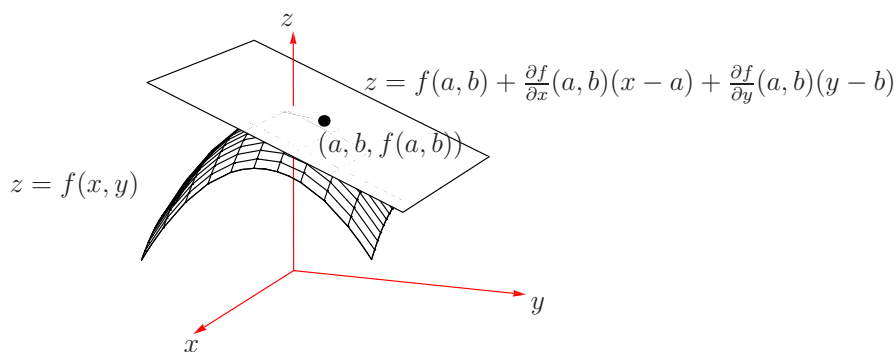


Figura 2: Derivada em \mathbb{R}^2 . Plano tangente ao gráfico no ponto $(a, b, f(a, b))$

No caso em que $n = 1$, a derivada será dada por uma matriz coluna que pode ser escrita na forma vectorial. Havendo apenas uma variável em jogo, ou seja,

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)),$$

com $t \in \mathbb{R}$, usaremos a seguinte notação para a respectiva derivada:

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_m(t)).$$

No caso em que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto (a, b) , temos

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + o(x - a, y - b).$$

Se notarmos que a equação,

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b),$$

define um plano que passa pelo ponto $(a, b, f(a, b))$, dizemos que, suficientemente perto deste ponto o gráfico da função f se confunde com aquele plano.

Na figura 2 encontra-se representado o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e o plano tangente definido pela respectiva derivada.

Exemplo 1.1 A função $f(x, y) = x$, definida em \mathbb{R}^2 é diferenciável em qualquer ponto de \mathbb{R}^2 .

Seja (a, b) um ponto qualquer de \mathbb{R}^2 . Fixando $y = b$ e derivando f como função apenas de x obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 1.$$

Fixando $x = a$ e derivando f como função apenas de y obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Portanto,

$$Df(a, b) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] = [1 \quad 0]$$

e

$$Df(a, b)(h, k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = h.$$

Assim,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Df(a, b)(h, k)}{\| (h, k) \|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{a+h - a - h}{\| (h, k) \|} = 0$$

e, portanto f é diferenciável em (a, b) , de acordo com a definição (1.1).

Exemplo 1.2 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja A a matriz (com m linhas e n colunas) que a representa na base canónica de \mathbb{R}^n , ou seja, $f(x) = Ax$.

É claro que, dados x e a em \mathbb{R}^n , teremos

$$f(x) - f(a) = f(x - a) = A(x - a)$$

e, portanto, a função f é diferenciável em qualquer ponto de \mathbb{R}^n e a respectiva derivada é dada pela matriz A , ou seja $Df(a) = A$.

Exemplo 1.3 Consideremos a função $f(x, y) = (x + 2y, 2x + 3y)$. É claro que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação linear e, portanto, a respectiva derivada é dada pela matriz

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.4 O gradiente da função $f(x, y) = \frac{x}{y}$ no ponto (x, y) do respectivo domínio é o vector

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right)$$

Exemplo 1.5 Consideremos a função $f(x, y) = \left(\frac{x}{y}, \sin(xy), e^{x^2+y^2} \right)$.

A respectiva Jacobiana será a matriz de três linhas e duas colunas,

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{bmatrix}.$$

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável num ponto $a \in \text{int}(D)$ e consideremos a matriz (1) que representa a derivada $Df(a)$.

Note-se que na j -ésima linha de $Df(a)$ se encontra o gradiente da função coordenada f_j , ou seja, para construir a matriz $Df(a)$ basta considerar cada uma das funções coordenadas de f . Assim, iremos apenas considerar funções escalares, ou seja, $m = 1$.

Recordemos que a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ é calculada fixando todas as variáveis excepto x_k , o que significa calcular a derivada de uma função real de variável real.

Na figura (3) encontra-se uma representação gráfica deste procedimento em \mathbb{R}^2 .

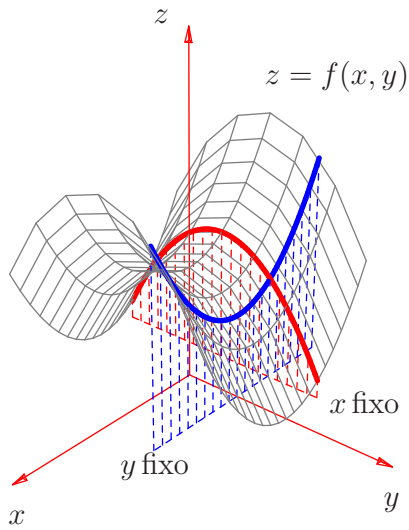


Figura 3: Procedimento para cálculo de derivadas parciais

Exemplo 1.6 Consideremos a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para $(x, y) \neq (0, 0)$, fixando y e derivando em ordem a x teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Fixando x e derivando em ordem a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Na origem deveremos usar a definição de derivada parcial. Assim, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

porque $f(t, 0) = f(0, 0) = 0$.

Do mesmo modo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

porque $f(0, t) = f(0, 0) = 0$.

Portanto, as derivadas parciais existem em todos os pontos de \mathbb{R}^2 .

No entanto esta função não é diferenciável na origem. De facto, se tal sucedesse, teríamos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Mas, sendo $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$, o limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

não existe, como facilmente se verifica fazendo $k = h$.

Note-se que f não é contínua na origem e, portanto, não poderíamos esperar que fosse diferenciável nesse ponto. No entanto, as derivadas parciais existem.

Este exemplo leva-nos a pensar que a existência de derivadas parciais não garante a diferenciabilidade da função.

Na figura (4) encontra-se o gráfico desta função.

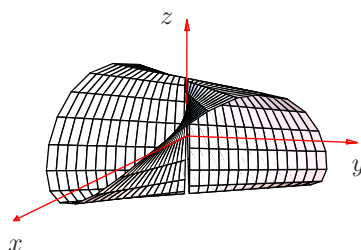


Figura 4: Gráfico da função $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Exemplo 1.7 Consideremos a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Na figura (5) encontra-se o gráfico desta função.

Tendo em conta que

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$$

é claro que esta função é contínua na origem.

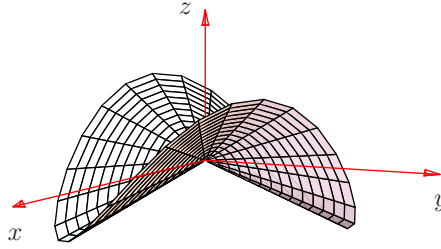


Figura 5: Gráfico da função $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Para $(x, y) \neq (0, 0)$, fixando y e derivando em ordem a x teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Fixando x e derivando em ordem a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Na origem deveremos usar a definição de derivada parcial. Assim, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

porque $f(t, 0) = f(0, 0) = 0$.

Do mesmo modo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

porque $f(0, t) = f(0, 0) = 0$.

Portanto, as derivadas parciais existem em todos os pontos de \mathbb{R}^2 .

No entanto esta função não é diferenciável na origem. De facto, se tal sucedesse, teríamos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0)(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Mas, sendo $f(0, 0) = 0$ e $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, teremos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2} \neq 0,$$

como facilmente se verifica fazendo $k = h$.

Portanto, esta função não é diferenciável na origem.

Note-se que as derivadas parciais de f não são contínuas na origem. Basta fazer $y = mx$ para verificar que os limites $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ não existem.

Exemplo 1.8 Consideremos a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

cujo gráfico se encontra na figura 6.

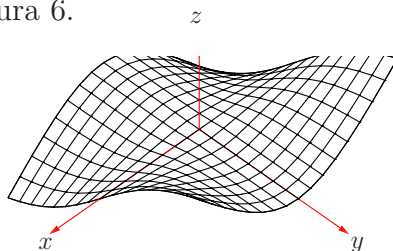


Figura 6: Gráfico da função $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Tal como no exemplo anterior, facilmente se verifica que se trata de uma função contínua em \mathbb{R}^2 e, as respectivas derivadas parciais na origem existem e são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0)(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k}{h^2 + k^2} = 0,$$

ou seja, trata-se de uma função diferenciável na origem.

Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^3 y + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

e é fácil verificar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 ; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

ou seja, as derivadas parciais são contínuas em \mathbb{R}^2 .

2 Identificação de Funções Diferenciáveis. Propriedades

O uso da definição de função diferenciável pode tornar-se penoso. Esta tarefa pode ser facilitada recorrendo às propriedades das funções diferenciáveis.

Por definição, se uma função escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for diferenciável em $a \in \mathbb{R}^n$, teremos

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + o(x - a).$$

Notemos que a função $x \mapsto Df(a)(x - a)$ é contínua em a . De facto, temos

$$|Df(a)(x - a)| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) \right| \leq C \|x - a\|$$

em que $C = n \max_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right|$.

Notemos também que

$$|o(x - a)| = \frac{|o(x - a)|}{\|x - a\|} \|x - a\|,$$

e podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

ou seja, f é contínua em a .

Recordemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua se e só se cada uma das componentes escalares $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, for contínua.

Portanto, **se uma função for diferenciável num ponto será necessariamente contínua nesse ponto.**

Neste contexto, a propriedade mais importante é a que se refere à derivada da composição de funções.

Consideremos a seguinte composição de funções diferenciáveis

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & g(x) & \mapsto & f(g(x)) \\ a & \mapsto & b = g(a) & \mapsto & f(g(a)) = f(b) \end{array}$$

e sejam $U \in \mathbb{R}^n$ e $V \in \mathbb{R}^p$ conjuntos abertos tais que $f(U) \subset V$.

Sejam $a \in U$ e $b = g(a) \in V$. Sendo g diferenciável em a teremos

$$g(a + h) - g(a) = Dg(a)h + o_g(h).$$

Seja $k \in \mathbb{R}^p$ tal que $g(a + h) = b + k$. Sendo f diferenciável em $b = g(a)$ teremos

$$f(b + k) - f(b) = Df(b)k + o_f(k)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
f(g(a+h)) - f(g(a)) &= Df(g(a))k + o_f(k) \\
&= Df(g(a))(g(a+h) - g(a)) + o_f(k) \\
&= Df(g(a))(Dg(a)h + o_g(h)) + o_f(k) \\
&= Df(g(a))Dg(a)h + Df(g(a))o_g(h) + o_f(k).
\end{aligned}$$

Assim, a função $f \circ g$ será diferenciável em a e a respectiva derivada será

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a))Dg(a)$$

desde que se verifique

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Df(g(a))o_g(h) + o_f(k)}{\|h\|} = 0.$$

Para isso basta notar que, sendo $k = g(a+h) - g(a)$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{o_f(k)}{\|h\|} &= \frac{o_f(k)}{\|k\|} \frac{\|k\|}{\|h\|} \\
&= \frac{o_f(k)}{\|k\|} \frac{\|g(a+h) - g(a)\|}{\|h\|} \\
&= \frac{o_f(k)}{\|k\|} \frac{\|Dg(a)h + o_g(h)\|}{\|h\|},
\end{aligned}$$

Note-se também que, dado um vector qualquer $v \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz $A = (a_{ij})$ com m linhas e n colunas, temos

$$\|Av\| \leq C\|v\|$$

em que $C = nm \max_{i,j} |a_{ij}|$.

Podemos, assim, enunciar o célebre teorema da derivada da função composta.

Teorema 2.1 (Função Composta) *Se g é diferenciável no ponto a e f é diferenciável no ponto $g(a)$, então $f \circ g$ é diferenciável no ponto a e*

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a))Dg(a).$$

Note-se que a matriz que representa a derivada $Dg(a)$ tem p linhas e n colunas e a que representa a derivada $Df(g(a))$ tem m linhas e p colunas. Assim, a matriz que representa a derivada da função composta $D(f \circ g)(a)$ tem m linhas e n colunas por ser o produto $Df(g(a))Dg(a)$.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em $a \in \text{int}(D)$ e consideremos a seguinte composição

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{s} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \quad (2)$$

em que $h(x) = (f(x), g(x))$ e $s(u, v) = u + v$.

Pelo teorema da função composta temos

$$D(s \circ h)(a) = D(s(h(a)))Dh(a)$$

em que

$$Ds(h(a)) = Ds(f(a), g(a)) = \left[\frac{\partial s}{\partial u}(f(a), g(a)) \quad \frac{\partial s}{\partial v}(f(a), g(a)) \right] = [1 \quad 1]$$

e

$$Dh(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} D(s \circ h)(a) &= D(s(h(a)))Dh(a) = \\ &= \left[\frac{\partial s}{\partial u}(f(a), g(a)) \quad \frac{\partial s}{\partial v}(f(a), g(a)) \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \right] \\ &= Df(a) + Dg(a) \end{aligned}$$

Se notarmos que $s(h(x)) = f(x) + g(x)$, concluímos que **a soma de funções diferenciáveis é uma função diferenciável** e a respectiva derivada é dada por

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a),$$

ou seja, a derivada da soma é a soma das derivadas.

Se na composição (2) fizermos $s(u, v) = uv$ facilmente concluímos que **o produto de funções diferenciáveis é uma função diferenciável** e a respectiva derivada é dada por

$$D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + g(a)Df(a).$$

Do mesmo modo, se em (2) fizermos $s(u, v) = \frac{u}{v}$, com $v \neq 0$, **o quociente de funções diferenciáveis é uma função diferenciável** e teremos

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2},$$

desde que $g(a) \neq 0$.

É também claro que se f for uma função diferenciável e $\alpha \in \mathbb{R}$ então αf , é diferenciável.

Exemplo 2.1 A função (ver a figura (5))

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

não é diferenciável na origem mas é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

De facto, f é o quociente $f(x, y) = \frac{h(x, y)}{g(x, y)}$ em que $h(x, y) = xy$ e $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A função h é diferenciável por ser o produto de funções diferenciáveis.

A função g é a composição $r \circ s$,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{s} & \mathbb{R} & \xrightarrow{r} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 & \mapsto & \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$

em que $s(x, y) = x^2 + y^2$ e $r(u) = \sqrt{u}$, ($u \neq 0$), são funções diferenciáveis.

Exemplo 2.2 A função (ver a figura (4))

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

não é contínua na origem e, portanto, não será diferenciável nesse ponto. Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é diferenciável por ser o quociente de funções diferenciáveis.

Exemplo 2.3 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x, y) = \text{sen}(u(x, y)v(x, y))$$

em que u e v são funções escalares, diferenciáveis em \mathbb{R}^2 , tais que $u(1, 0) = 2$ e $v(1, 0) = \pi$.

É uma função diferenciável por ser a composição $f = g \circ h$ de funções diferenciáveis

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (u(x, y), v(x, y)) & \mapsto & \text{sen}(u(x, y)v(x, y)) \end{array}$$

em que

$$h(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

e

$$g(u, v) = \text{sen}(uv).$$

Assim, dado que $h(1, 0) = (2, \pi)$, teremos

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 0) &= Dg(h(1, 0))Dh(1, 0) = Dg(2, \pi)Dh(1, 0) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) & \frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) & \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) & \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) & \frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) & \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) & \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) \quad \frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) \right] \\ &= \left[\frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) \quad \frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) \right] \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = v \cos(uv)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = u \cos(uv),$$

e, portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) = \pi$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) = 2,$$

teremos

$$\nabla f(1, 0) = \left[\pi \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + 2 \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) \quad \pi \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) + 2 \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) \right].$$

Na forma vectorial será

$$\nabla f(1, 0) = \left(\pi \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + 2 \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0), \pi \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) + 2 \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) \right).$$

Note-se que, num ponto qualquer (x, y) , teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

ou numa forma mais concisa,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Exemplo 2.4 Diz-se que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é **homogénea** de grau k se, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, tivermos $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$. As funções homogéneas desempenham um papel importante em Termodinâmica.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, sejam $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ as funções definidas por

$$g(\lambda) = f(\lambda x); \quad h(\lambda) = \lambda x.$$

É claro que a função g é a função composta $f \circ h$, ou seja, $g(\lambda) = f(h(\lambda))$,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & h(\lambda) & \mapsto & f(h(\lambda)) \\ \lambda & \mapsto & \lambda x & \mapsto & f(\lambda x). \end{array}$$

Assim, teremos

$$g'(\lambda) = Df(h(\lambda))h'(\lambda) = \nabla f(\lambda x) \cdot x.$$

Por outro lado, tendo em conta que $g(\lambda) = f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$, teremos

$$g'(\lambda) = k\lambda^{k-1} f(x)$$

e, portanto,

$$\nabla f(\lambda x) \cdot x = k\lambda^{k-1}f(x).$$

Dado que λ é arbitrário, fazendo $\lambda = 1$, obtemos

$$\nabla f(x) \cdot x = kf(x),$$

ou ainda,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) x_j = kf(x).$$

A função estudada no exemplo (1.7) é contínua na origem mas as respectivas derivadas parciais não são e a função não é diferenciável nesse ponto.

Por sua vez a função estudada no exemplo (1.8) é diferenciável na origem e as respectivas derivadas parciais são funções contínuas na origem.

Estes dois exemplos levam-nos a colocar a questão seguinte: Será que a continuidade das derivadas parciais de uma função implica que essa função seja diferenciável?

Para vermos que a resposta a esta questão é sim vamos considerar apenas o caso em que temos uma função escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas numa bola centrada num ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Tendo em conta a definição de função diferenciável deveremos ter

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) - \nabla f(a, b)(h, k) = o((h, k)),$$

ou seja,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

A variação $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ pode ser calculada (ver figura (7)) do seguinte modo

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = [f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] + [f(a+h, b) - f(a, b)].$$

Note-se que a variação $f(a+h, b+k) - f(a+h, b)$ é calculada ao longo do segmento de recta vertical em que $x = a+h$ e a variação $f(a+h, b) - f(a, b)$ é calculada ao longo do segmento de recta horizontal em que $y = b$. Portanto, em ambos os casos, uma das variáveis está fixa, ou seja, a função f dependerá apenas de uma das variáveis.

Usando o teorema do valor médio para funções reais de variável real, existirá $d \in]b, b+k[$ tal que

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, d)k$$

e, do mesmo modo, existirá $c \in]a, a + h[$ tal que

$$f(a + h, b) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, b)h.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k = \\ & = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right] h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a + h, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] k \end{aligned}$$

Dado que as derivadas parciais são contínuas e que

$$\left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1 ; \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1,$$

teremos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

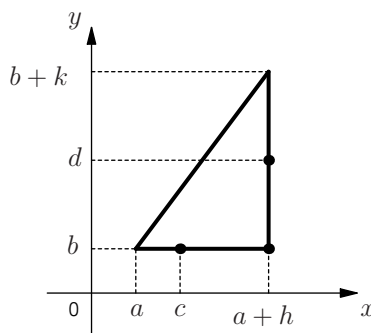


Figura 7

Definição 2.1 (Funções de classe C^1) Diz-se que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, em que D é aberto, é de classe C^1 se em cada ponto $x \in D$ as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ existirem e forem contínuas.

Teorema 2.2 (Condição Suficiente de Diferenciabilidade) Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 . Então f é diferenciável.

A função estudada no exemplo (5)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em \mathbb{R}^2 , diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mas não é diferenciável na origem.

Note-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

É fácil verificar que as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

não são contínuas na origem.

Por outro lado, a função estudada no exemplo (1.8)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tem derivadas parciais contínuas e, portanto é diferenciável em \mathbb{R}^2 .

3 Derivada Direccional. Gradiente

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar diferenciável em D e consideremos um vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\| = 1$.

Seja $a \in D$ e, sendo f diferenciável teremos

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a)h + o(h).$$

Fazendo $h = tv$ em que $t \in \mathbb{R}$, teremos

$$f(a+tv) - f(a) = t\nabla f(a)v + o(tv),$$

ou seja,

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \nabla f(a)v + \frac{o(tv)}{t},$$

e, portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \nabla f(a)v. \quad (3)$$

Note-se que o vector v determina a recta ou direcção de pontos da forma $a+tv$, $t \in \mathbb{R}$. Assim, o limite anterior é calculado tomando apenas pontos sobre a direcção determinada por v . Trata-se, portanto da taxa de variação de f na direcção de v como se ilustra na figura (8).

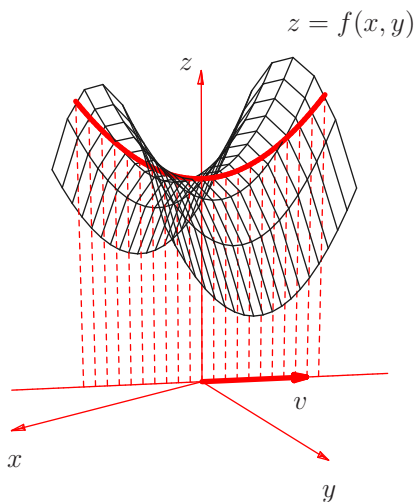


Figura 8: Procedimento para calcular a derivada direccional segundo v

Definição 3.1 *Ao limite*

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

chamamos **derivada direccional** de f em a segundo o vector v .

Da equação (3), concluímos que

$$D_v f(a) = \nabla f(a)v. \quad (4)$$

Portanto, para saber do comportamento de f na direcção determinada por v basta conhecer o respectivo gradiente.

Note-se que

$$\begin{aligned} D_v f(a) = \nabla f(a)v &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)v_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)v_n. \end{aligned}$$

Portanto, na forma vectorial, a derivada direccional $D_v f(a)$ é o produto interno dos vectores $\nabla f(a)$ e v .

Assim, sendo $\|v\| = 1$, temos

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v = \|\nabla f(a)\| \|v\| \cos \alpha = \|\nabla f(a)\| \cos \alpha$$

em que α é o ângulo determinado pelos vectores $\nabla f(a)$ e v .

Podemos então concluir que a derivada direccional $D_v f(a)$ será a maior possível no caso em que $\cos \alpha = 1$, ou seja, quando os vectores $\nabla f(a)$ e v são paralelos.

Portanto, **o vector gradiente $\nabla f(a)$ determina a direcção segundo a qual a derivada direccional de f em a é a maior possível.**

Da equação (3) podemos também concluir que a derivada direccional $D_v f(a)$ será nula na direcção definida pelo vector v ortogonal ao gradiente $\nabla f(a)$.

Exemplo 3.1 Consideremos a função $f(x, y) = x^2 + xy$ e o ponto $(1, 1)$.

Então,

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x + y, x)$$

e no ponto $(1, 1)$ teremos

$$\nabla f(1, 1) = (3, 1).$$

- Consideremos o vector $v = (1, 2)$. Dado que $\| (1, 2) \| = \sqrt{5}$, para calcular a derivada direccional de f em $(1, 1)$ na direcção determinada por v deveremos usar, de acordo com a definição, o vector $\frac{v}{\|v\|}$. Assim, teremos

$$D_v f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \frac{v}{\|v\|} = (3, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

- Podemos também determinar a direcção segundo a qual a derivada de f em $(1, 1)$ é nula. Essa direcção será determinada por um vector $v = (v_1, v_2)$ ortogonal a $\nabla f(1, 1)$, ou seja

$$Df_v(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot (v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow (3, 1) \cdot (v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow v_2 = -3v_1.$$

Fazendo $v_1 = 1$ temos $v = (1, -3)$.

4 Linha. Tangente

Exemplo 4.1 Consideremos a recta em \mathbb{R}^2 dada pela equação $x + y = 1$. (ver figura 9).

Note-se que

$$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$$

e, portanto, esta recta pode ser descrita como sendo o conjunto

$$\{(x, 1 - x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função contínua definida por $g(x) = (x, 1 - x)$. É claro que a recta é a imagem da função g .

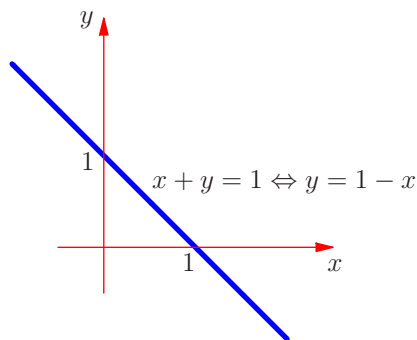


Figura 9: Recta dada por: $x + y = 1$

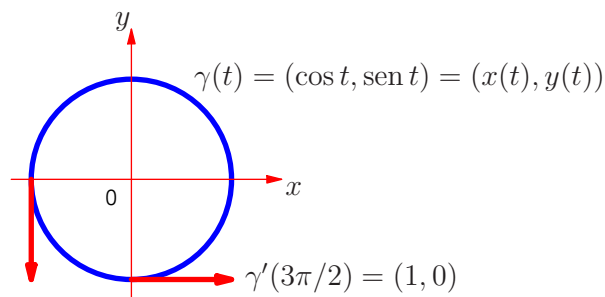


Figura 10: Uma circunferência em \mathbb{R}^2

Exemplo 4.2 Consideremos a função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \text{sen } t).$$

Sendo $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ e fazendo $(\cos t, \text{sen } t) = (x(t), y(t))$, fica claro que a imagem da função γ é a circunferência de raio um e centro na origem de \mathbb{R}^2 que se encontra representada na figura (10).

Exemplo 4.3 Consideremos a função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \text{sen } t, t).$$

Sendo $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ e fazendo $(\cos t, \text{sen } t, t) = (x(t), y(t), z(t))$, fica claro que a imagem da função γ é uma linha assente sobre a superfície cilíndrica vertical de raio um e que se encontra representada na figura (11).

Dos exemplos anteriores fica claro que funções contínuas de uma variável real $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ descrevem linhas em \mathbb{R}^n .

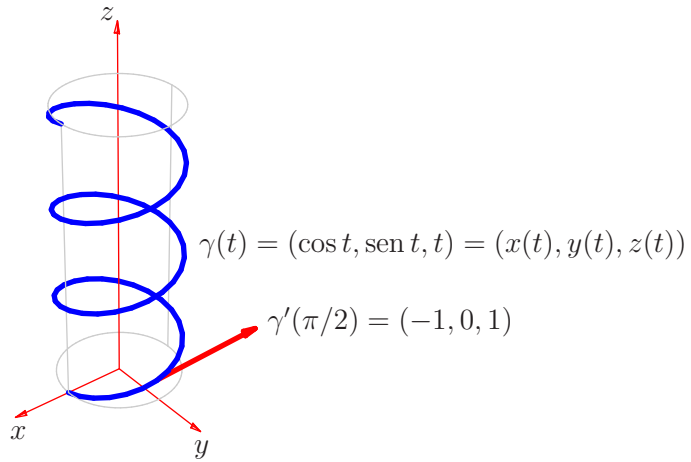


Figura 11: Uma hélice cilíndrica em \mathbb{R}^3

Por definição, diz-se que um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ é uma linha se for a imagem de uma função contínua $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

No caso em que γ é uma função de classe C^1 a respectiva derivada será dada por

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

Note-se (ver figura (12)) que, pictoricamente, os vectores secantes $\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$ transformam-se, à medida que $h \rightarrow 0$, num vector $\gamma'(t)$ que é tangente à linha no ponto $\gamma(t)$.

Esta ideia leva-nos à definição de vector tangente a uma linha num dado ponto.

Definição 4.1 (Vector Tangente) *Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e consideremos a linha descrita por γ . Ao vector*

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

chamamos vector tangente à linha no ponto $\gamma(t)$.

No exemplo (4.2) temos

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

e, portanto,

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Na figura (10) estão representados os vectores tangentes $\gamma'(\pi) = (0, -1)$ no ponto $\gamma(\pi) = (-1, 0)$ e $\gamma'(3\pi/2) = (1, 0)$ no ponto $\gamma(3\pi/2) = (0, -1)$.

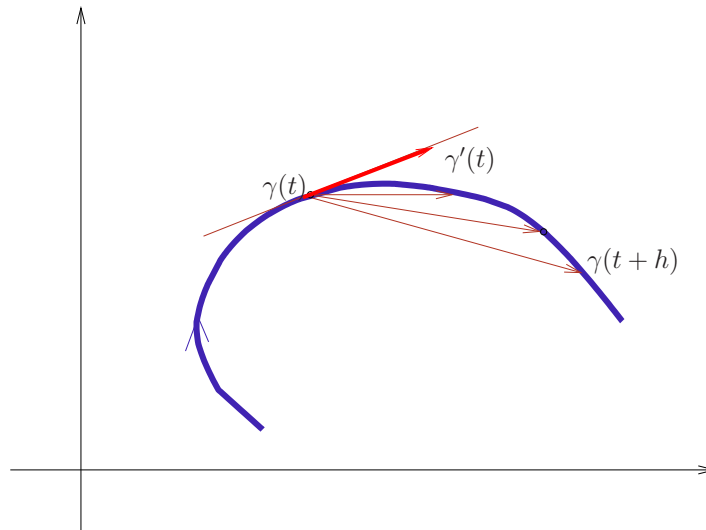


Figura 12: Tangente a uma linha

No exemplo (4.3) temos

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

e, portanto,

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

Na figura (11) está representado o vector tangente no ponto $\gamma(\pi/2) = (0, 1, \pi/2)$ dado pela derivada $\gamma'(\pi/2) = (-1, 0, 1)$.

Seja L uma linha descrita por uma função γ e a um ponto de L tal que $a = \gamma(t_0)$. Seja $\vec{T} = \gamma'(t_0)$ o vector tangente a L em a .

A recta que passa em a e com a direcção de \vec{T} , designada por **recta tangente** a L no ponto a , é o conjunto de pontos definido por

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x - a = \lambda \vec{T}; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

No caso da hélice cilíndrica do exemplo (4.3) a recta tangente no ponto $(0, 1, \pi/2)$ é dada por

$$(x, y, z) - (0, 1, \pi/2) = \lambda (-1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$x = -\lambda; y - 1 = 0; z - \frac{\pi}{2} = \lambda$$

e, portanto, é a recta definida pelas duas equações seguintes

$$y = 1; x + z = \frac{\pi}{2}.$$

5 Conjunto de Nível. Normal

Dada uma função escalar $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , ao conjunto definido por

$$N_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = \alpha\},$$

chamamos **conjunto de nível** α de f .

Note-se que todos os conjuntos definidos por equações do tipo $F(x) = \alpha$, são conjuntos de nível zero de $F(x) - \alpha$.

Os seguintes são exemplos de conjuntos de nível.

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ (Linha recta).
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (Circunferência).
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$ (Hipérbole).
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ (Parábola).
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ (Plano).
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (Esfera).
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ (Hiperbolóide).
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2\}$ (Parabolóide).
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\}$ (Toro).

Seja $a \in N_0$ um ponto qualquer.

Seja $L \subset N_0$ uma linha (assente em N_0) descrita por uma função $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\epsilon \in \mathbb{R}$, e tal que

$$a = \gamma(0).$$

Dado que $L \subset N_0$, é claro que $\gamma(t) \in N_0$ e, portanto,

$$F(\gamma(t)) = 0 ; -\epsilon < t < \epsilon$$

e, pelo teorema da derivada da função composta, teremos

$$\nabla F(\gamma(0))\gamma'(0) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla F(a)\gamma'(0) = 0.$$

Assim, os vectores $\gamma'(0)$ e $\nabla F(a)$ são ortogonais entre si.

Note-se que o vector $\gamma'(0)$ é, por definição, tangente a L no ponto a . Nesta situação, diz-se que o vector $\vec{T} = \gamma'(0)$ é tangente a N_0 no ponto a .

Seja \vec{N} um vector ortogonal a \vec{T} , ou seja, um vector que verifica a equação $\vec{N} \cdot \vec{T} = 0$. Ao vector \vec{N} chamamos **vector normal** a N_0 no ponto a .

Assim, o vector gradiente, $\nabla F(a)$, é um vector normal ao conjunto de nível N_0 de F .

Portanto, **o gradiente de uma função escalar num ponto é normal ao respectivo conjunto de nível dessa função.**

Exemplo 5.1 Consideremos o parabolóide P , definido por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2\},$$

e que se encontra representado na figura (13).

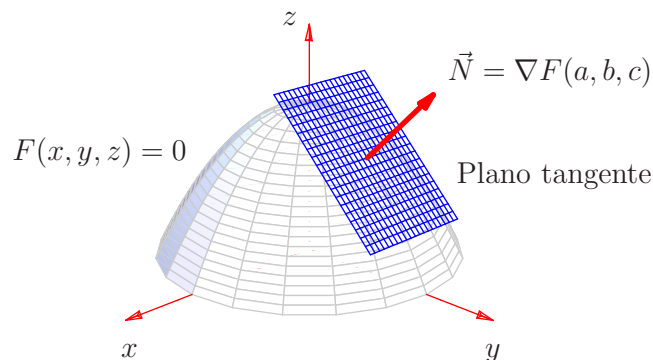


Figura 13: Normal e plano tangente

Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função escalar definida por

$$F(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 1.$$

Então o parabolóide P é o conjunto de nível zero de F , e em cada ponto $(a, b, c) \in P$ a respectiva normal será dada pelo gradiente de F nesse ponto $\nabla F(a, b, c)$ tal como se representa na figura (13).

O vector normal $\vec{N} = \nabla F(a, b, c)$ determina a **recta normal** a P que passa pelo ponto (a, b, c) e será o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (a, b, c) + \lambda \nabla F(a, b, c) ; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Por definição de vector normal, os vectores ortogonais a \vec{N} são tangentes a P no ponto (a, b, c) e constituem um espaço linear de dimensão 2.

O plano gerado pelos vectores tangentes e que passa pelo ponto (a, b, c) chama-se **plano tangente** a P no ponto (a, b, c) e é dado pela equação

$$(x - a, y - b, z - c) \cdot \nabla f(a, b, c) = 0.$$

Dado que $\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 1)$, no ponto $(0, 0, 1)$ teremos $\vec{N} = \nabla F(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ e, portanto, a recta normal nesse ponto é dada por

$$(x, y, z) - (0, 0, 1) = \lambda \vec{N},$$

ou seja,

$$(x, y, z - 1) = \lambda(0, 0, 1) \Leftrightarrow x = 0 ; y = 0 ; z \in \mathbb{R}$$

que é o eixo Oz .

O plano tangente será dado por

$$(x, y, z - 1) \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow (x, y, z - 1) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow z = 1,$$

ou seja, é o plano horizontal definido por $z = 1$.

Note-se que o parabolóide P é o **gráfico** da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$$

Sendo f diferenciável, próximo do ponto (a, b) com $f(a, b) = c$, teremos

$$f(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b) + o(x - a, y - b),$$

ou seja, fazendo $z = f(x, y)$, teremos

$$z = c + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + o(x - a, y - b).$$

O plano definido pela equação

$$z = c + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é de facto o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, c) = (a, b, f(a, b))$.

Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -2a ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -2b,$$

esse plano será dado pela equação

$$z = c - 2a(x - a) - 2b(y - b).$$

No caso do ponto $(0, 0, 1)$, será dado pela equação $z = 1$, tal como obtido acima.

Neste exemplo temos $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ e, portanto,

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y),$$

ou seja, o **gráfico de f** é o **conjunto de nível zero de F** .

Temos, assim, duas formas diferentes de descrever o mesmo conjunto.

- Como conjunto de nível de F temos,

$$\nabla F(a, b, c) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1 \right)$$

e, portanto, o plano tangente no ponto (a, b, c) será dado pela equação

$$(z - c) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0.$$

- Como gráfico de f temos, pela definição de derivada, que o plano tangente é dado pela equação

$$z = c + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Referências

- [1] Tom M. Apostol. *Calculus II*. Editorial Reverté, SA, 1977.
- [2] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise em R^n* . AEIST, 1978.
- [3] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman and Company, 1998.