

Teorema da Divergência

Nestas notas apresentaremos o teorema da divergência em \mathbb{R}^3 (Teorema de Gauss) devido ao interesse das suas aplicações. O caso geral pode ser visto em [2].

1 Fluxo de um Campo Vectorial. Exemplos

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 (superfície), definida por uma vizinhança de coordenadas e seja $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização.

Seja $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial em que $S \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto tal que $M \subset S$. Ao integral

$$\int_M F \cdot \nu = \int_T F(g(t)) \cdot \nu(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

em que $\nu(x)$ designa a normal (unitária) a M no ponto $x \in M$, chamamos *fluxo do campo vectorial F através de M segundo a normal ν* .

Nota 1.1 Sejam $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ dois vectores em \mathbb{R}^3 e consideremos o *produto externo* de A por B definido por

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Facilmente se verificam as seguintes propriedades

- Designando por e_1, e_2, e_3 os vectores da base canónica de \mathbb{R}^3 (ver figura 1), temos

$$e_1 \times e_2 = e_3; e_2 \times e_3 = e_1; e_3 \times e_1 = e_2$$

- $B \times A = -A \times B$
- $A \times B$ é ortogonal a A e a B .
- $\|A \times B\| = \sqrt{\det \Delta^t \Delta}$ em que Δ é a matriz cujas colunas são os vectores A e B .

Portanto, se designarmos por $D_1 g(t)$ e $D_2 g(t)$, respectivamente, a primeira e a segunda colunas da matriz $Dg(t)$, então o produto externo

$$D_1 g(t) \times D_2 g(t)$$

é um vector normal a M no ponto $x = g(t)$ porque as colunas da matriz $Dg(t)$ geram o espaço tangente a M no ponto $x = g(t)$.

Assim, temos

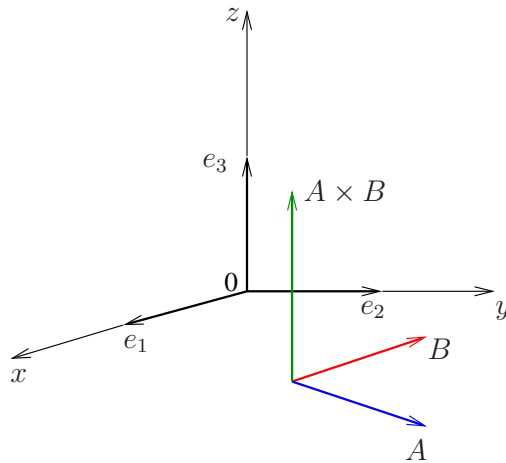


Figura 1: Produto externo em \mathbb{R}^3

- Uma normal unitária em $x = g(t)$ é dada por

$$\nu(g(t)) = \frac{D_1g(t) \times D_2g(t)}{\|D_1g(t) \times D_2g(t)\|}$$

- $\sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} = \|D_1g(t) \times D_2g(t)\|$

e, portanto,

$$\nu(g(t))\sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} = D_1g(t) \times D_2g(t)$$

ou seja, o fluxo de F é dado por

$$\int_M F \cdot \nu = \int_T F(g(t)) \cdot D_1g(t) \times D_2g(t) dt$$

Exemplo 1.1 Consideremos o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

Seja S^2 a superfície esférica

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

cuja normal ν no ponto $(0, 1, 0)$ tem segunda componente positiva, tal como se representa na figura 2.

Para calcular o fluxo de F através de S^2 segundo a normal ν seja

$$T = \{(\theta, \phi) : 0 < \theta < 2\pi; 0 < \phi < \pi\}$$

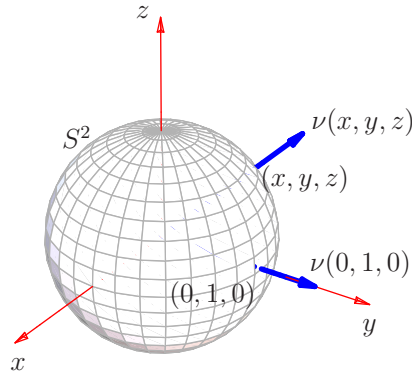


Figura 2: Superfície esférica S^2

e $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de $S^2 \setminus N$ dada por

$$g(\theta, \phi) = (\text{sen } \phi \cos \theta, \text{sen } \phi \text{sen } \theta, \cos \phi)$$

em que $N = \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$.

Então,

$$D_1g(\theta, \phi) = (-\text{sen } \phi \text{sen } \theta, \text{sen } \phi \cos \theta, 0)$$

$$D_2g(\theta, \phi) = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \text{sen } \theta, -\text{sen } \phi)$$

e, portanto,

$$D_1g(\theta, \phi) \times D_2g(\theta, \phi) = (-\text{sen}^2 \phi \cos \theta, -\text{sen}^2 \phi \text{sen } \theta, -\text{sen } \phi \cos \phi)$$

No ponto $(0, 1, 0) = g(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ temos

$$D_1g(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times D_2g(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, -1, 0)$$

ou seja, a normal a considerar é dada por $D_2g(\theta, \phi) \times D_1g(\theta, \phi)$.

Assim, o fluxo de F através de S^2 segundo a normal ν é dado por

$$\begin{aligned} \int_{S^2} F \cdot \nu &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi F(g(\theta, \phi)) \cdot (D_2g(\theta, \phi) \times D_1g(\theta, \phi)) d\phi \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \text{sen } \phi d\phi \right) d\theta \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Podemos calcular o fluxo de F de outra forma. Sendo S^2 dada pela equação

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

então, em cada ponto $(x, y, z) \in S^2$, a normal unitária é dada por

$$\nu(x, y, z) = \frac{DG(x, y, z)}{\|DG(x, y, z)\|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x, y, z)$$

e, portanto,

$$F(x, y, z) \cdot \nu(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ou seja,

$$\int_{S^2} F \cdot \nu = \text{vol}_2(S^2) = 4\pi$$

Exemplo 1.2 Seja $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e consideremos a superfície cilíndrica M definida pela equação

$$x^2 + y^2 = 1$$

e tal que $0 < z < 2$. Seja ν a normal unitária a M que no ponto $(0, 1, 1)$ tem segunda componente positiva tal como se representa na figura 3.

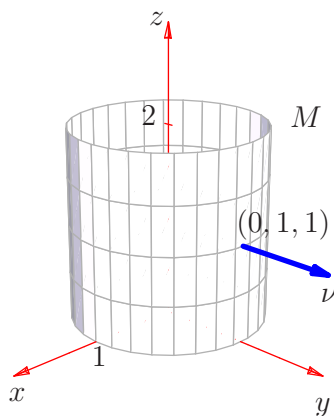


Figura 3: Superfície cilíndrica M

Da equação $x^2 + y^2 = 1$, obtemos a normal

$$\nu(x, y, z) = \frac{(2x, 2y, 0)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = (x, y, 0)$$

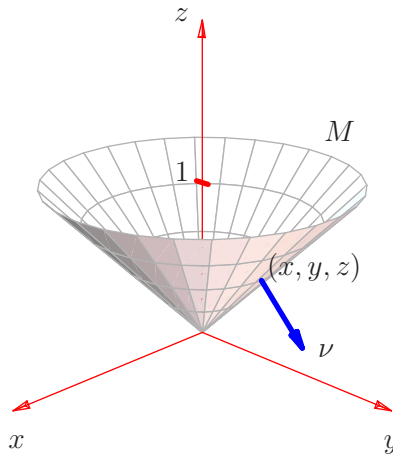


Figura 4: O cone M

e, portanto,

$$F(x, y, z) \cdot \nu(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$$

Assim, o fluxo de F através de M segundo a normal ν é dado por

$$\int_M F \cdot \nu = \text{vol}_2(M) = 4\pi$$

Exemplo 1.3 Consideremos o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

e o cone

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 ; 0 < z < 1\}$$

Seja ν a normal unitária que em cada ponto de M tem terceira componente negativa tal como se representa na figura 4.

Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) o cone M é dado pela equação $z = \rho$. Então, consideremos a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho)$$

em que

$$T =]0, 1[\times]0, 2\pi[$$

Facilmente se verifica que g é uma parametrização de $M \setminus N$ em que

$$N = \{(x, y, z) \in M : y = 0 ; x \geq 0\}$$

é uma linha sobre M .

Então

$$\begin{aligned} D_1g(\rho, \theta) &= (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 1) \\ D_2g(\rho, \theta) &= (-\rho \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \theta, 0) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$D_2g(\rho, \theta) \times D_1g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, -\rho)$$

e o fluxo de F através de M segundo a normal ν é dada por

$$\begin{aligned} \int_M F \cdot \nu &= \int_{M \setminus N} F \cdot \nu = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} F(g(\rho, \theta)) \cdot D_2g(\rho, \theta) \times D_1g(\rho, \theta) d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (-\rho \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \theta, 0) \cdot (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, -\rho) d\theta \right) d\rho \\ &= 0 \end{aligned}$$

Note-se que, da equação $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ que define M , podemos calcular a normal unitária

$$\nu(x, y, z) = \frac{DG(x, y, z)}{\|DG(x, y, z)\|} = \frac{(2x, 2y, -2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Então

$$F(x, y, z) \cdot \nu(x, y, z) = (-y, x, 0) \cdot \frac{(2x, 2y, -2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

e, portanto, o fluxo de F através de M segundo a normal ν é nulo.

Exemplo 1.4 Seja $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$ e consideremos a superfície M definida por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z < 1\}$$

Seja ν a normal a M que no ponto $(0, 0, 0)$ tem terceira componente negativa tal como se representa na figura 5.

Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , a superfície M é dada pela equação $z = \rho^2$. Então, seja $g :]0, 1[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, \rho^2)$$

Facilmente se verifica que g é uma parametrização de $M \setminus N$ em que

$$N = \{(x, y, z) : y = 0; x \geq 0\}$$

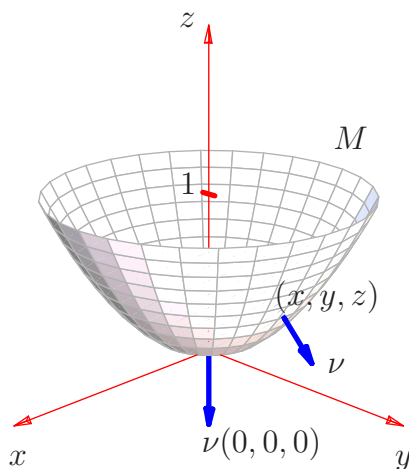


Figura 5: Parabolóide M

é uma linha sobre M e

$$\begin{aligned} D_1g(\rho, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, 2\rho) \\ D_2g(\rho, \theta) &= (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \end{aligned}$$

Assim,

$$D_2g(\rho, \theta) \times D_1g(\rho, \theta) = (2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta, -\rho)$$

Portanto, o fluxo de F através de M segundo a normal ν é dado por

$$\begin{aligned} \int_M F \cdot \nu &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 F(g(\rho, \theta)) \cdot D_2g(\rho, \theta) \times D_1g(\rho, \theta) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 1) \cdot (2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta, -\rho) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 -\rho d\rho \right) d\theta \\ &= -\pi \end{aligned}$$

Exemplo 1.5 Seja S a superfície esférica centrada na origem de \mathbb{R}^3 e com raio R . Consideremos o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

Em coordenadas esféricas S é descrita pela equação $r = R$ e, portanto, consideremos a parametrização $g :]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, \phi) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi)$$

Então

$$\begin{aligned} D_1g(\theta, \phi) &= (-R \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, R \operatorname{sen} \phi \cos \theta, 0) \\ D_2g(\theta, \phi) &= (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \operatorname{sen} \theta, -R \operatorname{sen} \phi) \\ D_1g(\theta, \phi) \times D_2g(\theta, \phi) &= (-R^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta, -R^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta, -R^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi) \end{aligned}$$

e, portanto, o fluxo de F através de S segundo a normal que em cada ponto se dirige para a origem é dado por

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi F(g(\theta, \phi)) \cdot D_1g(\theta, \phi) \times D_2g(\theta, \phi) d\phi \right) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \operatorname{sen} \phi d\phi \right) d\theta \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

2 Teorema da Divergência

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado e seja (x, y, z) um ponto sobre a fronteira ∂D . Suponhamos que existe uma vizinhança V de (x, y, z) tal que $\partial D \cap V$ é uma superfície.

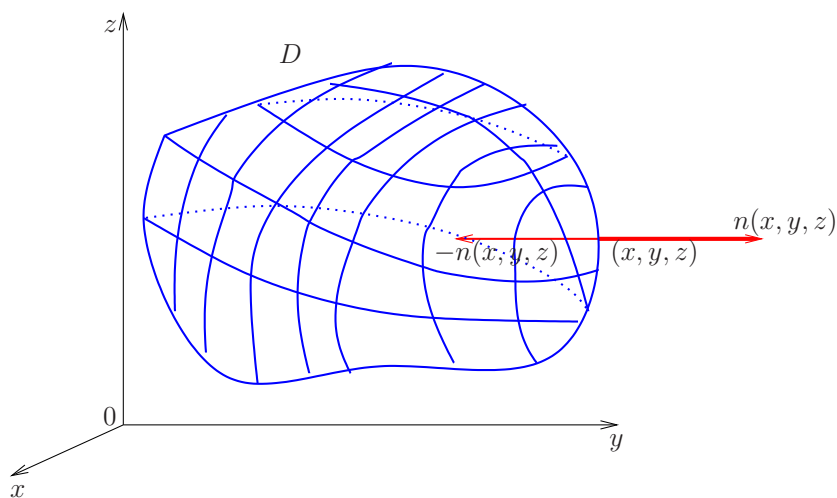


Figura 6: Normal exterior

Seja $n(x, y, z)$ a normal a $\partial D \cap V$ no ponto (x, y, z) e suponhamos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} (x, y, z) + tn(x, y, z) &\in \mathbb{R}^3 \setminus D; \quad 0 < t < \epsilon \\ (x, y, z) - tn(x, y, z) &\in D; \quad 0 < t < \epsilon \end{aligned}$$

Então, diz-se que a normal $n(x, y, z)$ é *exterior* a D . Em cada ponto $(x, y, z) \in \partial D$ a normal $n(x, y, z)$ dirige-se do interior para o exterior de D , tal como se representa na figura 6.

Nota 2.1 Suponhamos que $\partial D \cap V$ é um conjunto de nível de uma função $H : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} D \cap V &= \{(x, y, z) : H(x, y, z) < 0\} \\ (\mathbb{R}^3 \setminus D) \cap V &= \{(x, y, z) : H(x, y, z) > 0\} \end{aligned}$$

Então, a normal $n(x, y, z) = DH(x, y, z)$ é exterior a D . De facto, se considerarmos a função $\psi(t) = H((x, y, z) + t n(x, y, z))$, então

$$\psi(0) = H(x, y, z) ; \quad \psi'(0) = DH(x, y, z) \cdot n(x, y, z) = \|DH(x, y, z)\|^2 > 0$$

donde se conclui que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} H((x, y, z) + t n(x, y, z)) &> 0 \quad ; \quad 0 < t < \epsilon \\ H((x, y, z) - t n(x, y, z)) &< 0 \quad ; \quad 0 < t < \epsilon \end{aligned}$$

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um aberto. Dado um campo vectorial $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 , a *Divergência* de F é o campo escalar $\text{div}F : S \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\text{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e limitado. Diz-se que D é um *domínio elementar* (ver [3, 1]) se for definido, simultaneamente, das três formas seguintes:

- a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi_1(x, y) < z < \phi_2(x, y) ; (x, y) \in T_1\}$ em que $\phi_1, \phi_2 : T_1 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e definidas num aberto limitado $T_1 \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira é uma linha regular Γ_1 . Portanto, na direcção z , o conjunto D encontra-se entre dois gráficos de classe C^1 (variedades-2).
- b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \psi_1(y, z) < x < \psi_2(y, z) ; (y, z) \in T_2\}$ em que $\psi_1, \psi_2 : T_2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e definidas num aberto limitado $T_2 \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira é uma linha regular Γ_2 . Portanto, na direcção x , o conjunto D encontra-se entre dois gráficos de classe C^1 (variedades-2).
- c) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \eta_1(x, z) < y < \eta_2(x, z) ; (x, z) \in T_3\}$ em que $\eta_1, \eta_2 : T_3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e definidas num aberto limitado $T_3 \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira é uma linha regular Γ_3 . Portanto, na direcção y , o conjunto D encontra-se entre dois gráficos de classe C^1 (variedades-2).

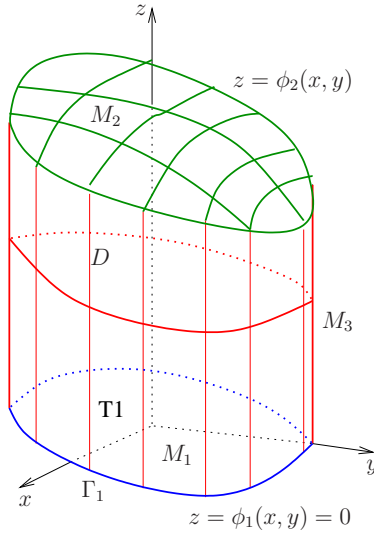


Figura 7: D descrito na forma a)

Suponhamos que o campo F é dado por $F = (0, 0, F_3)$ e consideremos o domínio D definido como em a) e tal como se representa na figura 7. Então, a fronteira de D é constituída por três porções de superfície:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, y, z) : z = \phi_1(x, y); (x, y) \in T_1\} \\ M_2 &= \{(x, y, z) : z = \phi_2(x, y); (x, y) \in T_1\} \\ M_3 &= \{(x, y, z) : (x, y) \in \Gamma_1; \phi_1(x, y) < z < \phi_2(x, y)\} \end{aligned}$$

em que Γ_1 designa a linha regular que limita T_1 .

Na figura 7 considera-se o caso em que $\phi_1(x, y) = 0$.

Note-se que M_3 é uma superfície vertical e, portanto, em cada um dos seus pontos, a normal ν tem terceira componente nula. Assim, o fluxo de $F = (0, 0, F_3)$ através de M_3 segundo a normal ν é nulo.

Seja $g_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de M_1 definida por

$$g_1(x, y) = (x, y, \phi_1(x, y))$$

Então,

$$\begin{aligned} D_1 g_1(x, y) &= \left(1, 0, \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right) \\ D_2 g_1(x, y) &= \left(0, 1, \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

e o vector

$$D_2 g_1(x, y) \times D_1 g_1(x, y) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, -1\right)$$

é a normal exterior a D no ponto $g_1(x, y) \in M_1$.

O fluxo de F através de M_1 segundo a normal unitária exterior é dado por

$$\begin{aligned}\int_{M_1} F \cdot \nu &= \int_{T_1} F(g_1(x, y)) \cdot D_2 g_1(x, y) \times D_1 g_1(x, y) dx dy \\ &= - \int_{T_1} F_3(x, y, \phi_1(x, y)) dx dy\end{aligned}$$

Do mesmo modo se calcula o fluxo de F através de M_2 segundo a normal unitária exterior

$$\begin{aligned}\int_{M_2} F \cdot \nu &= \int_{T_1} F(g_2(x, y)) \cdot D_1 g_1(x, y) \times D_2 g_1(x, y) dx dy \\ &= \int_{T_1} F_3(x, y, \phi_2(x, y)) dx dy\end{aligned}$$

Portanto, o fluxo de F através da fronteira de D segundo a normal exterior é a soma dos fluxos sobre M_1, M_2, M_3 :

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = \int_{T_1} F_3(x, y, \phi_2(x, y)) dx dy - \int_{T_1} F_3(x, y, \phi_1(x, y)) dx dy$$

Por outro lado, o integral da divergência de F em D é dado por

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{div} F dx dy dz &= \int \int_{T_1} \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \int \int_{T_1} [F_3(x, y, \phi_2(x, y)) - F_3(x, y, \phi_1(x, y))] dx dy\end{aligned}$$

Para um campo $F = (F_1, 0, 0)$ consideramos D descrito como em b) e para um campo $F = (0, F_2, 0)$ consideramos D descrito como em c).

Tendo em conta a linearidade do integral e da derivada, fica estabelecida a igualdade

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot \nu$$

para um domínio elementar D .

Sem grande dificuldade se mostra que o mesmo acontece para um domínio que pode ser decomposto numa união finita de domínios elementares e a que chamaremos *domínio regular*.

Teorema 2.1 Teorema da Divergência: *Sejam*

- $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio regular,
- $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 .

Então,

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot \nu$$

em que ν é a normal unitária exterior à fronteira de D .

3 Exemplos

Exemplo 3.1 Consideremos o campo vectorial dado por $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e o domínio definido por

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

Então $\operatorname{div} F = 3$ e, portanto,

$$\int_D \operatorname{div} F = 3 \operatorname{vol}_3(D) = 4\pi$$

Do exemplo 1.1, o fluxo do campo F através da fronteira de D segundo a normal unitária e exterior é dado por

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = 4\pi$$

e, portanto,

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot \nu$$

Note-se que D é um domínio elementar. De facto, temos

$$D = \{(x, y, z) : -\sqrt{1-x^2-y^2} < z < \sqrt{1-x^2-y^2}; x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D = \{(x, y, z) : -\sqrt{1-y^2-z^2} < x < \sqrt{1-y^2-z^2}; y^2 + z^2 < 1\}$$

$$D = \{(x, y, z) : -\sqrt{1-x^2-z^2} < y < \sqrt{1-x^2-z^2}; x^2 + z^2 < 1\}$$

Exemplo 3.2 Seja M a superfície definida por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$$

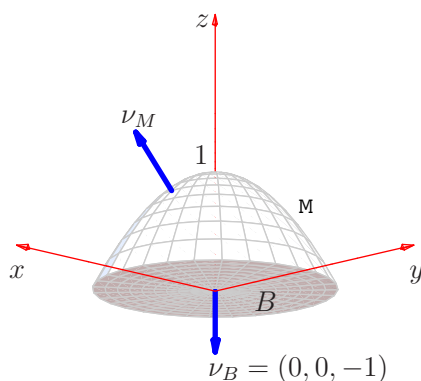


Figura 8:

e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = (x, y, -z)$$

Para calcular o fluxo de F através de M segundo a normal que no ponto $(0, 0, 1)$ tem terceira componente positiva, consideremos o teorema da divergência aplicado ao domínio

$$D = \{(x, y, z) : 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$$

Facilmente se constata que D é um domínio regular cuja fronteira é a união de duas superfícies, M e B , em que

$$B = \{(x, y, z) : z = 0; x^2 + y^2 < 1\}$$

tal como se representa na figura 8.

Dado que $\text{div}F = 1$, do teorema da divergência, obtemos

$$\text{vol}(D) = \int_M F \cdot \nu_M + \int_B F \cdot \nu_B$$

Mas, em B temos $z = 0$ e, portanto, a normal unitária e exterior é o vector $\nu_B = (0, 0, -1)$. Assim, em B , temos $F \cdot \nu_B = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$, ou seja,

$$\int_B F \cdot \nu_B = 0$$

Portanto,

$$\int_M F \cdot \nu_M = \text{vol}(D) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-\rho^2} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 3.3 Seja $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ e seja M a superfície cilíndrica dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$ e limitada pelos planos $z = 1$ e $z = -1$.

Vamos usar o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de M segundo a normal que no ponto $(0, 1, 0)$ tem segunda componente positiva.

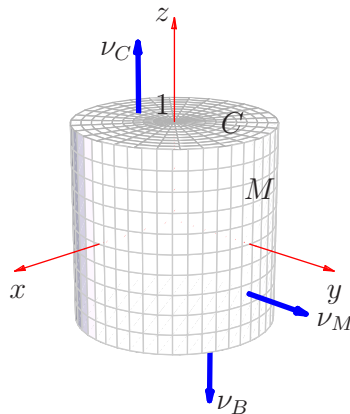


Figura 9:

Seja D o domínio elementar limitado por M e pelos planos $z = 1$ e $z = -1$

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1 ; -1 < z < 1\}$$

O integral da divergência de F em D pode ser calculado usando coordenadas cilíndricas

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_D (y^2 + x^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) dz \right) d\theta = \pi$$

O fluxo de F através da fronteira de D resulta de três contribuições:

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = \int_M F \cdot \nu + \int_B F \cdot \nu + \int_C F \cdot \nu$$

em que

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y, z) : z = -1 ; x^2 + y^2 < 1\} \\ C &= \{(x, y, z) : z = 1 ; x^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$

tal como se representa na figura 9.

Para B consideremos a parametrização $g :]0, 2\pi[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, -1)$$

e, portanto,

$$D_2g(\rho, \theta) \times D_1g(\rho, \theta) = (0, 0, -\rho)$$

Para C consideremos a parametrização $h :]0, 2\pi[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$h(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 1)$$

e, portanto,

$$D_1h(\rho, \theta) \times D_2h(\rho, \theta) = (0, 0, \rho)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_B F \cdot \nu &= - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \right) d\theta = 0 \\ \int_C F \cdot \nu &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \right) d\theta = 0 \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência ao domínio D , obtemos

$$\int_M F \cdot \nu = \int_D \operatorname{div} F - \int_B F \cdot \nu - \int_C F \cdot \nu = \pi$$

Exemplo 3.4 Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio regular e consideremos o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

Suponhamos que o ponto de coordenadas $(0, 0, 0)$ não se encontra sobre a fronteira de D .

Então, o fluxo do campo vectorial F através da fronteira do conjunto D segundo a normal exterior é dado por

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = \begin{cases} 4\pi & \text{se } (0, 0, 0) \in D \\ 0 & \text{se } (0, 0, 0) \notin D \end{cases}$$

Suponhamos que o ponto $(0, 0, 0) \notin D$. Então o campo F é de classe C^1 em D e podemos aplicar o teorema da divergência. Note-se que

$$\operatorname{div} F = 0$$

e, portanto,

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = 0$$

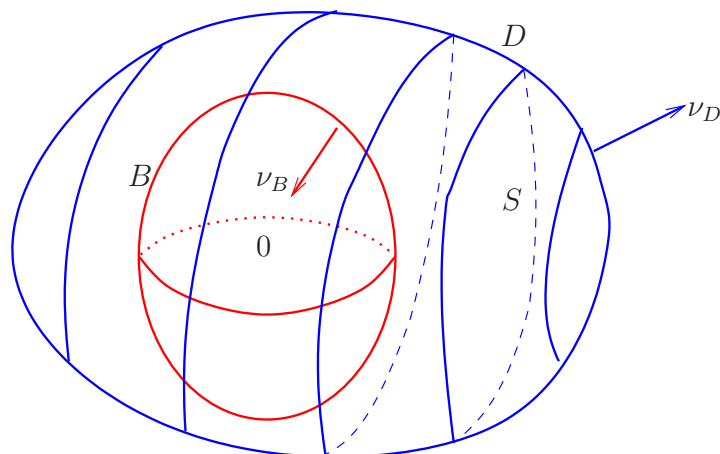


Figura 10:

Para o caso em que $(0, 0, 0) \in D$, o campo F não está definido em D e, portanto, não podemos aplicar o teorema da divergência directamente.

Se D um conjunto aberto, existe uma bola B de raio $\epsilon > 0$ e centrada na origem e contida em D , tal como se representa na figura 10. Seja $S = D \setminus \overline{B}$. Então, F é de classe C^1 em S e podemos aplicar o teorema da divergência

$$0 = \int \int_{\partial D} F \cdot \nu_D + \int \int_{\partial B} F \cdot \nu_B$$

em que ν_D e ν_B se dirigem, respectivamente, para o exterior de D e para o interior de B .

Do exemplo 1.5, temos

$$\int_{\partial B} F \cdot \nu_B = -4\pi$$

e, portanto,

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu_D = - \int_{\partial B} F \cdot \nu_B = 4\pi$$

Referências

- [1] F. R. Dias Agudo. *Cálculo Integral em R^n* . Escolar Editora, 1973.
- [2] Luís T. Magalhães. *Integrais em Variedades e Aplicações*. Texto Editora, 1993.
- [3] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman and Company, 1998.