Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise
Prof. Gabriel Pires

Teorema de Green no Plano

O teorema de Green permite relacionar o integral de linha ao longo de uma curva fechada Γ com um integral duplo na região limitada pela linha Γ em $\mathbb{R}^2$. Veremos que esta relação será determinante no cálculo do integral de linha de um campo vectorial fechado.

Neste texto, iremos usar a seguinte notação para o integral de linha de um campo vectorial $F = (P, Q)$ ao longo de uma linha Γ:

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = \int_\Gamma P dx + Q dy$$

Note-se que, sendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, temos

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$$

e, portanto,

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}$$

dando sentido à notação que usaremos para o integral de linha de um campo vectorial.

Ao integral de linha de um campo vectorial F sobre um caminho simples e fechado Γ chamaremos **circulação** de F ao longo de Γ.

1 Domínio Elementar. Domínio Regular

Definição 1 *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e limitado. Diz-se que D é um* **domínio elementar** *se for descrito, simultaneamente, nas duas formas seguintes (c.f. [1]):*

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) < y < g(x)\ ;\ a < x < b\}$ em que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são duas funções de classe C^1.

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(y) < x < \psi(y)\ ;\ c < y < d\}$ em que $\phi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ são duas funções de classe C^1.

Exemplo 1.1 Um intervalo em $\mathbb{R}^2$ é um domínio elementar tal como se ilustra na figura 1.

Exemplo 1.2 Um círculo em $\mathbb{R}^2$ é um domínio elementar. Na figura 2 encontra-se um círculo de raio R e centrado na origem. Para este caso temos:

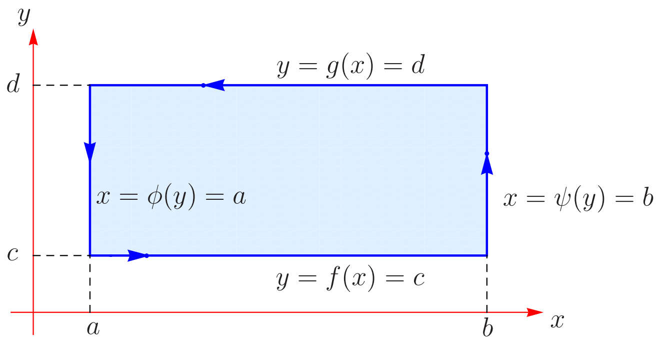

Figura 1: Um intervalo é um domínio elementar

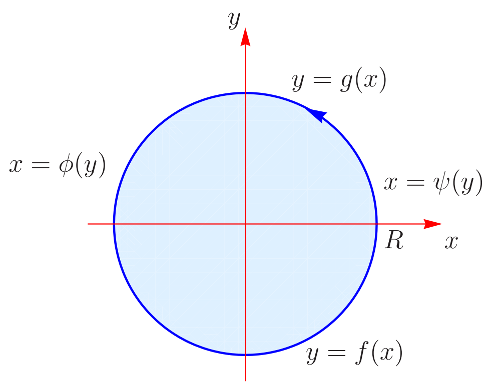

Figura 2: Um círculo é um domínio elementar

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\sqrt{R^2 - x^2}\ ;\ -R < x < R \\
g(x) &= \sqrt{R^2 - x^2}\ ;\ -R < x < R \\
\phi(y) &= -\sqrt{R^2 - y^2}\ ;\ -R < x < R \\
\psi(y) &= \sqrt{R^2 - y^2}\ ;\ -R < x < R
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.3 Um quarto de uma coroa circular no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ não é um domínio elementar mas é a união de seis domínios elementares como se ilustra na figura 3.

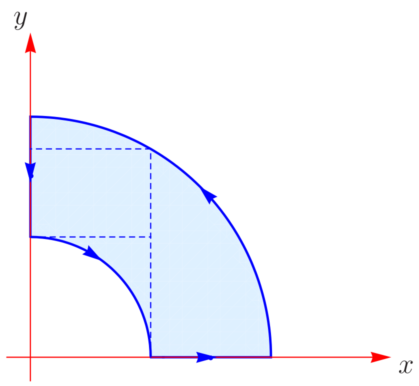

Figura 3: Uma coroa circular é a união de quatro domínios elementares

Exemplo 1.4 Um losango é a união de quatro domínios elementares, D_1, D_2, D_3, D_4, como se pode constatar na figura 4.

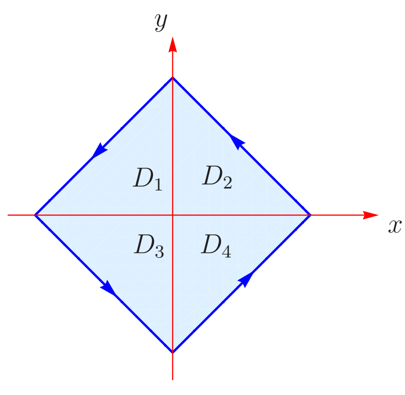

Figura 4: Um losango é a união de quatro domínios elementares

Dos exemplos fica claro que há muitos conjuntos que são uniões finitas de conjuntos elementares.

Definição 2 *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e limitado. Diz-se que D é um* **domínio regular** *se for uma união finita de domínios elementares.*

2 Teorema de Green

Teorema 2.1 *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular e ∂D a sua fronteira.*

Seja $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vectorial de classe C^1 cujo domínio contém D.

Então,

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_\Gamma Pdx + Qdy$$

em que a linha ∂D é percorrida no sentido positivo.

Suponhamos que D é um domínio elementar. Dado que $F = (P,Q) = (P,0) + (0,Q)$ e sendo o integral linear, supomos que D é descrito na forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) < y < g(x) \ ; \ a < x < b\},$$

e que $F = (P,0)$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx \\ &= \int_a^b \left(P(x,g(x)) - P(x,f(x))\right) dx\end{aligned}$$

Por outro lado, a fronteira ∂D é a união de quatro linhas

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

definidas por

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{(x,y) : a \leq x \leq b; y = f(x)\} \\ \Gamma_2 &= \{(x,y) : x = b; f(b) \leq y \leq g(b)\} \\ \Gamma_3 &= \{(x,y) : a \leq x \leq b; y = g(x)\} \\ \Gamma_4 &= \{(x,y) : x = a; f(a) \leq y \leq g(a)\}\end{aligned}$$

e percorridas no sentido positivo. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma &= \int_a^b P(x, f(x))dx \\
\int_{\Gamma_2} F \cdot d\gamma &= 0 \\
\int_{\Gamma_3} F \cdot d\gamma &= -\int_a^b P(x, g(x))dx \\
\int_{\Gamma_4} F \cdot d\gamma &= 0
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\partial D} Pdx = \int_{\partial D} F \cdot d\gamma = \int_a^b P(x, f(x))dx - \int_a^b P(x, g(x))dx = -\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Do mesmo modo, considerando $F = (0, Q)$ e D descrito na forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(y) < x < \psi(y) \ ; \ c < y < d\},$$

obtemos

$$\int_{\partial D} Qdy = \int_{\partial D} F \cdot d\gamma = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy,$$

e, portanto,

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

Assim, o teorema de Green é válido para domínios elementares.

Suponhamos agora que D é uma união finita de domínios elementares.

Sem perda de generalidade, seja D a união de dois domínios elementares, D_1, D_2, tal como, a título ilustrativo, se apresenta na figura 5. Seja L a linha comum às fronteiras de D_1 e D_2, ou seja,

$$\partial D_1 = \Gamma_1 \cup L \ \ , \ \ \partial D_2 = \Gamma_2 \cup L$$

Note-se que $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Aplicando o teorema de Green a ambos os domínios, obtemos

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy + \int_L Pdx + Qdy \\
\int\int_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy - \int_L Pdx + Qdy
\end{aligned}$$

Note-se que o integral de linha de um campo vectorial F ao longo de um caminho tem o sinal contrário ao do integral de F ao longo da mesma linha mas percorrida no sentido contrário. Portanto, adicionando ambas as equações, obtemos

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

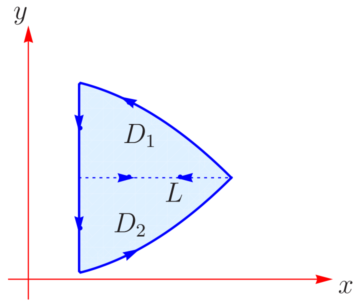

Figura 5: União de dois domínios elementares

É claro que este procedimento é válido para uma união finita de domínios elementares, ou seja, para um domínio regular.

Corolário 2.1 *Seja $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vectorial de classe C^1, fechado e definido num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.*

Seja Γ uma linha fechada que limita um domínio regular. Então, a circulação de F ao longo de Γ é nula, ou seja,

$$\oint_\Gamma F \cdot d\gamma = \oint_\Gamma P dx + Q dy = 0.$$

Sendo $F = (P, Q)$ um campo fechado, temos $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ e, aplicando o teorema de Green ao conjunto limitado por Γ, obtemos imediatamente

$$\oint_\Gamma F \cdot d\gamma = \oint_\Gamma P dx + Q dy = 0.$$

Exemplo 2.1 Seja D a coroa circular

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 < x^2 + y^2 < R^2\},$$

de raios r e R e representada na figura 6.

Seja $F = (P, Q)$ um campo vectorial de classe C^1, definido num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.

A fronteira ∂D é a união da circunferência Γ_2, de raio r, percorrida no sentido positivo, e da circunferência Γ_1, de raio R e percorrida no sentido negativo. Do exemplo 1.3, fica claro que a coroa circular D é um domínio regular.

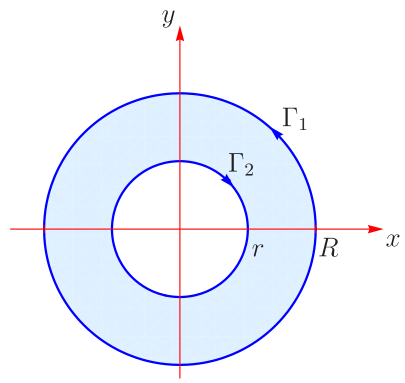

Figura 6: Coroa circular

Aplicando o teorema de Green, obtemos

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy + \int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy$$

Para o caso em que o campo F é fechado, obtemos

$$\int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = -\int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy$$

Se as duas linhas Γ_1 e Γ_2 forem **percorridas no mesmo sentido**, então

$$\int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy.$$

É claro que o mesmo raciocínio é válido para qualquer domínio regular $D \subset \mathbb{R}^2$, limitado por duas linhas Γ_1 e Γ_2.

Corolário 2.2 *Seja $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vectorial de classe C^1 e fechado.*

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular limitado por duas linhas fechadas Γ_1 e Γ_2, ***percorridas no mesmo sentido****.*

Então,

$$\int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy.$$

Exemplo 2.2 Consideremos o campo vectorial definido por

$$F(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}).$$

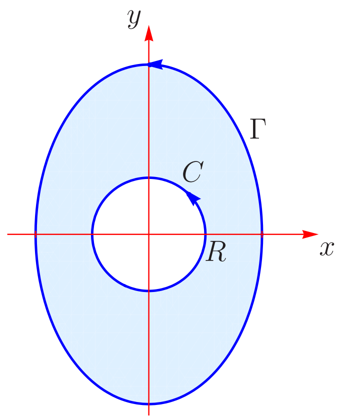

Figura 7:

É fácil verificar que F é um campo fechado.

Seja C uma circunferência de raio R e centro na origem, tal como se representa na figura 7. Usando a parametrização

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t)\ ;\ 0 < t < 2\pi,$$

a circulação de F em C será

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t) \cdot (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t)dt = 2\pi.$$

Note-se que a circulação de F não depende do raio da circunferência. Será que o integral numa outra linha Γ, fechada em torno da origem, terá o mesmo valor?

Vamos supor que as linhas C e Γ limitam um domínio regular e são percorridas no mesmo sentido, tal como se representa na figura 7. Aplicando o corolário 2.2 do teorema de Green a esse domínio, teremos

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_C Pdx + Qdy = 2\pi.$$

Se a linha Γ limitar um domínio regular que não contenha a origem no seu interior então, pelo corolário 2.1 do teorema de Green, teremos

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = 0.$$

Exemplo 2.3 Consideremos o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e definido por

$$F(x, y) = (-y, x)$$

e seja D um domínio regular cuja fronteira é a linha Γ percorrida no sentido positivo.

Sendo
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$
do teorema de Green obtemos
$$\int\int_D 2dxdy = \int_\Gamma -ydx + xdy$$
ou seja, temos uma relação entre a área de D e o integral de linha de F ao longo da fronteira
$$\mathrm{vol}_2(D) = \frac{1}{2}\int_\Gamma F \cdot d\gamma$$

Seja S o conjunto limitado por uma elipse, definido por
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$$
cuja fronteira Γ é descrita pelo caminho
$$\gamma(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)\ ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Então a área de S é dada por
$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(S) &= \frac{1}{2}\int_\Gamma -ydx + xdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-3\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t) \cdot (-2\,\mathrm{sen}\, t, 3\cos t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 6dt \\
&= 6\pi
\end{aligned}$$

Exemplo 2.4 Consideremos o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$, definido por
$$F(x, y) = \left(-\frac{y - 1}{x^2 + (y - 1)^2}, \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2}\right),$$
e seja Γ a fronteira do quadrilátero com vértices nos pontos
$$(3, 0), (0, 3), (-3, 0), (0, -3)$$
percorrida no sentido positivo e descrita por um caminho $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

Para calcular o integral de linha $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$, consideremos a região limitada por Γ e pela circunferência C de raio igual a um e centro no ponto $(0, 1)$ percorrida no sentido positivo e descrita pelo caminho
$$\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t + 1)\ ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

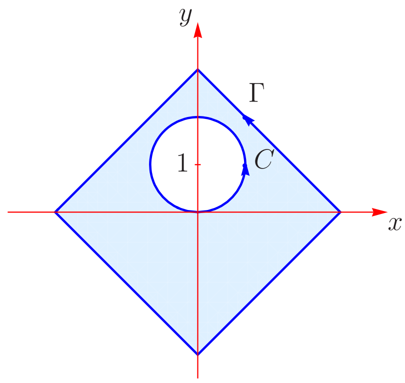

Figura 8:

como se mostra na figura 8.

Facilmente se verifica que o campo F é fechado e que a região considerada é um domínio regular.

Portanto, do teorema de Green obtemos,

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = \int_C F \cdot d\gamma$$

Por outro lado,

$$\int_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) = 2\pi$$

e, portanto,

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = 2\pi$$

Note-se que o cálculo directo do integral $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$, pela definição, seria bastante mais complicado.

Exemplo 2.5 Consideremos o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2,0),(2,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{(x-2)^2+y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}\right) + \left(-\frac{y}{(x+2)^2+y^2}, \frac{x+2}{(x+2)^2+y^2}\right)$$

e seja Γ uma linha regular tal como se representa na figura 9.

Para calcular o integral de linha $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$, consideremos a região limitada por Γ, pela circunferência C_1 de raio igual a um e centro no ponto $(2,0)$ e pela circunferência C_2 de raio igual a um e centro no ponto $(-2,0)$ como se mostra na figura 9.

Facilmente se verifica que o campo F é fechado e que a região considerada é um domínio regular.

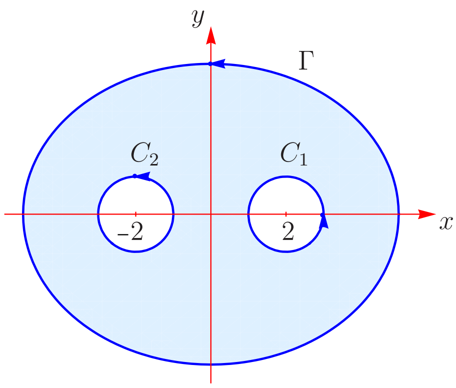

Figura 9:

Portanto, do teorema de Green obtemos,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{C_1} F \cdot d\gamma + \int_{C_2} F \cdot d\gamma.$$

Note-se que temos $F(x, y) = G(x, y) + H(x, y)$, em que

$$G(x, y) = \left(-\frac{y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right)$$

e

$$H(x, y) = \left(-\frac{y}{(x+2)^2 + y^2}, \frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} \right).$$

Usando a parametrização $\gamma(t) = (2 + \cos t, \operatorname{sen} t)$; $0 < t < 2\pi$ para C_1, obtemos

$$\int_{C_1} G \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) = 2\pi.$$

Usando a parametrização $\gamma(t) = (-2 + \cos t, \operatorname{sen} t)$; $0 < t < 2\pi$ para C_2, obtemos

$$\int_{C_2} H \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) = 2\pi.$$

Dado que o campo G é de classe C^1 no círculo limitado por C_2, pelo corolário 2.1 do teorema de Green, teremos

$$\int_{C_2} G \cdot d\gamma = 0.$$

Do mesmo modo, sendo H de classe C^1 no círculo limitado por C_1, teremos

$$\int_{C_1} H \cdot d\gamma = 0.$$

Portanto,

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = \int_{C_1} G \cdot d\gamma + \int_{C_2} G \cdot d\gamma + \int_{C_1} H \cdot d\gamma + \int_{C_2} H \cdot d\gamma = 2\pi + 2\pi = 4\pi.$$

***

Referências

[1] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman and Company, 1998.