

## CDI-II

### Função Implícita. Função Inversa

#### 1 Exemplos em $\mathbb{R}^2$

**Exemplo 1** Consideremos a equação da recta em  $\mathbb{R}^2$  dada pela equação  $x + y = 1$ . (ver figura 1).

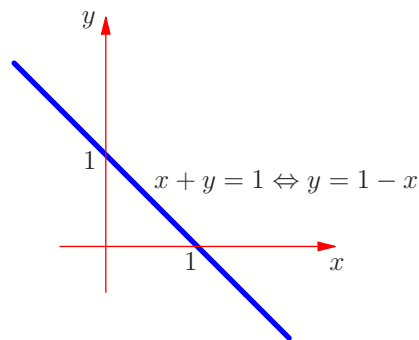


Figura 1: Recta dada por:  $x + y = 1$

Note-se que

$$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$$

e, portanto, a mesma recta pode ser descrita de duas formas diferentes:

- i) Como o conjunto de nível zero da função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x, y) = x + y - 1$ , ou seja, o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  em que  $F(x, y) = 0$ .
- ii) Como o gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 - x$ , ou seja, como o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  em que  $y = f(x)$ .

De outra forma, podemos dizer que a equação  $F(x, y) = 0$  define uma das variáveis como função da outra  $y = f(x)$ .

**Exemplo 2** Consideremos a equação que define a circunferência de raio um e centro na origem de  $\mathbb{R}^2$ , ou seja  $x^2 + y^2 = 1$ . (ver figura 2).

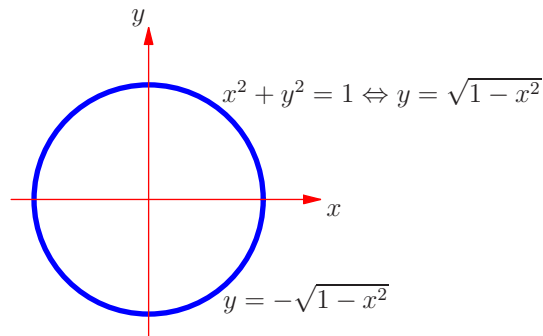


Figura 2: Circunferência dada por:  $x^2 + y^2 = 1$

É claro que temos

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, \text{ se } y > 0,$$

e, portanto, a parte da circunferência em que  $y > 0$  pode ser descrita de duas formas diferentes:

- i) Como o conjunto de nível zero da função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , ou seja, o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  em que  $F(x, y) = 0$ .
- ii) Como o gráfico da função  $f : ] - 1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , ou seja, o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  em que  $y = f(x)$ .

Assim, para  $y > 0$ , a equação  $F(x, y) = 0$  define uma das variáveis como função da outra  $y = f(x)$ .

Note-se que em torno dos pontos  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  a equação  $F(x, y) = 0$  não define  $y$  como função de  $x$ , mas define  $x$  como função de  $y$ . De facto, para  $x > 0$ , temos

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - y^2}.$$

Este exemplo mostra que a equivalência

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

não se verifica globalmente em todo o conjunto definido pela equação  $F(x, y) = 0$  mas apenas **localmente** em torno de cada um dos pontos desse conjunto.

**Exemplo 3** Consideremos o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  definido pela equação

$$xy + \sin(x + y) + \cos(x + y) = 5.$$

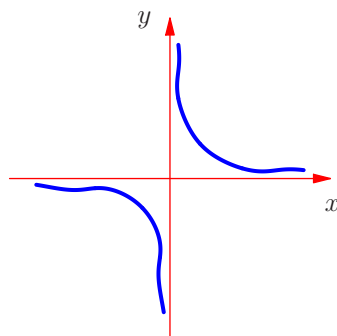


Figura 3: Conjunto definido por:  $xy + \sin(x + y) + \cos(x + y) = 5$

Neste caso, não parece fácil concluir que a equação dada defina uma das variáveis como função da outra, ou seja, descrever localmente este conjunto como o gráfico de alguma função.

Na figura 3, encontra-se a representação gráfica deste conjunto que permite concluir que se trata de um conjunto que pode ser descrito, localmente, como gráfico de alguma função de uma variável.

Do exemplo 3 surge a questão de saber se uma equação do tipo  $F(x, y) = 0$  define uma das variáveis como função da outra e se é possível obter alguma informação sobre a natureza dessa função. Note-se que pode não ser possível estabelecer uma das variáveis como função da outra directamente a partir da equação  $F(x, y) = 0$ .

\*\*\*

**Nota 1** Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é claro que o respectivo gráfico pode ser visto como o conjunto de nível zero de uma função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja, como o conjunto definido pela equação  $F(x, y) = 0$ .

De facto, fazendo  $F(x, y) = y - f(x)$ , temos

$$\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : y = f(x); x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

A questão que se coloca é a de saber se um conjunto definido por uma equação do tipo  $F(x, y) = 0$  pode ser descrito como o gráfico de alguma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Os exemplos anteriores mostram que, em geral, isso só poderá acontecer em termos locais, mesmo nos casos em que é possível efectuar explicitamente os cálculos.

\*\*\*

Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  e  $(a, b)$  um ponto tal que  $F(a, b) = 0$ . Suponhamos que, em alguma bola centrada no ponto  $(a, b)$  se tem

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x),$$

sendo  $f$  uma função real de variável real de classe  $C^1$  e definida em algum intervalo contendo o ponto  $a$ .

Assim, teremos  $F(x, f(x)) = 0$  e derivando obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)f'(a) = 0$$

Portanto,

$$f'(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

desde que se verifique a condição

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Concluimos então que, em certas condições, é possível calcular a derivada  $f'(a)$  mesmo não sendo possível determinar  $f$  a partir da equação  $F(x, y) = 0$ .

Surge, assim, a questão seguinte. Se  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função de classe  $C^1$  e  $(a, b)$  um ponto tal que

$$F(a, b) = 0 ; \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0,$$

existirá alguma função  $f$ , de classe  $C^1$ , tal que, localmente em torno de  $(a, b)$ , se tenha

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)?$$

A resposta afirmativa a esta questão é dada pelo Teorema da Função Implícita.

**Teorema 1 (Função Implícita em  $\mathbb{R}^2$ )** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  e  $(a, b)$  um ponto tal que*

$$F(a, b) = 0 ; \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

*Então, existe uma função  $f$ , de classe  $C^1$ , tal que, localmente em torno de  $(a, b)$ , se tem*

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

A equivalência local deve ser entendida no seguinte sentido. Existe uma bola centrada no ponto  $(a, b)$  em que o conjunto definido pela equação  $F(x, y) = 0$  é o gráfico de uma função  $f : ]a - \epsilon, a + \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\epsilon > 0$ , ou seja  $y = f(x)$ . (ver figura 4).

Seja  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função de classe  $C^1$  dada por

$$G(x, y) = (x, F(x, y)).$$

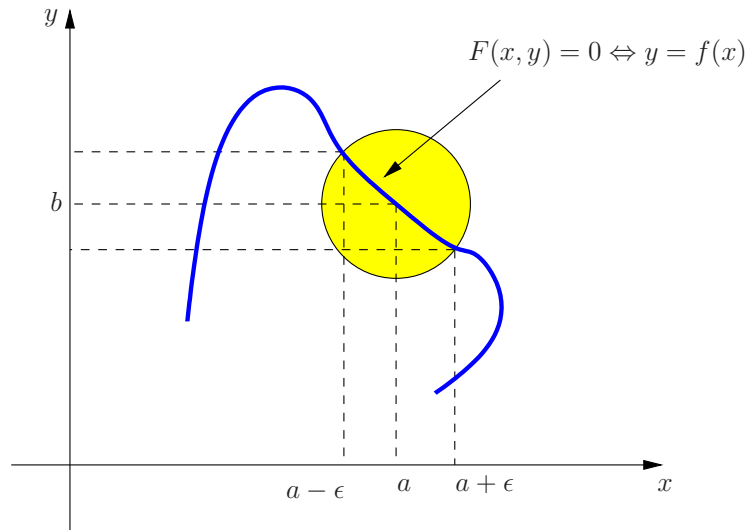


Figura 4: Função Implícita em  $\mathbb{R}^2$

Note-se que  $G(a, b) = (a, 0)$  e

$$\det DG(a, b) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Se a função  $G$  for invertível, localmente em torno do ponto  $(a, b)$ , teremos

$$G(x, y) = (x, F(x, y)) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) = G^{-1}(x, 0),$$

ou seja, existe uma função  $f$ , localmente definida em torno do ponto  $a$ , tal que se verifica a equivalência

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Se a função inversa  $G^{-1}$  for de classe  $C^1$ , então a função  $f$  também o será.

Portanto, o Teorema da Função Implícita depende do estabelecimento da existência local e da regularidade da função inversa  $G^{-1}$ . Este é o conteúdo do chamado Teorema da Função Inversa.

**Teorema 2** (*Função Inversa*) Seja  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  e  $a \in \mathbb{R}^n$  um ponto tal que

$$\det DG(a) \neq 0.$$

Então,  $G$  é localmente invertível em torno do ponto  $a$  e a respectiva inversa  $G^{-1}$  é uma função de classe  $C^1$ .

A existência e a regularidade locais da função inversa devem ser entendidas da forma seguinte. Existe uma bola  $B(a)$  centrada no ponto  $a$  e uma bola  $B(b)$  centrada no ponto  $b = G(a)$  tais que a função  $G : B(a) \rightarrow B(b)$  é uma bijecção (injectiva e sobrejectiva) e a respectiva inversa  $G^{-1} : B(b) \rightarrow B(a)$  é uma função de classe  $C^1$ . (ver figura 5).

Note-se que, em geral, não é possível resolver directamente as equações do tipo  $G(x) = b$ , ou seja, calcular a função inversa  $G^{-1}$ . O Teorema da Função Inversa estabelece uma condição suficiente,  $\det DG(a) \neq 0$ , para que uma função de classe  $C^1$  seja localmente invertível.

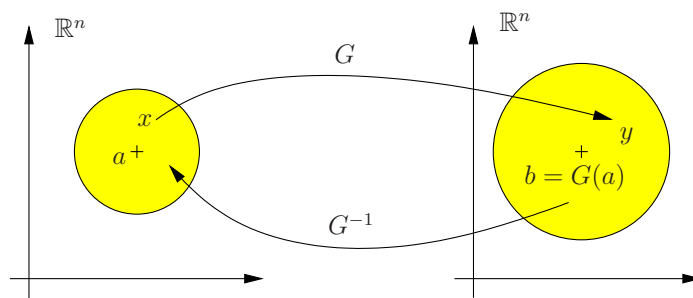


Figura 5: Função Inversa

Note-se que por definição de função inversa, temos

$$x = G^{-1}(G(x)), \forall x \in B(a)$$

e, portanto

$$DG^{-1}(b) = [DG(a)]^{-1},$$

ou seja, a matriz Jacobiana da função inversa  $G^{-1}$  no ponto  $b = G(a)$  é a inversa da matriz Jacobiana de  $G$  no ponto  $a$ .

**Exemplo 4** Consideremos a função  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$G(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

É claro que  $G$  é de classe  $C^1$  e a respectiva derivada é dada pela matriz

$$DG(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\det DG(x, y) = e^{2x} \neq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, a função  $G$  tem inversa local em torno de cada um dos pontos de  $\mathbb{R}^2$ .

No entanto, a função  $G$  não é invertível (não é injectiva) em  $\mathbb{R}^2$ . De facto, temos

$$G(x, 2k\pi) = (e^x, 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

ou seja, embora  $G$  não seja invertível em  $\mathbb{R}^2$  possui inversa local em torno de qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 5** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação linear, ou seja, existe uma matriz  $A_{n \times n}$  tal que  $f(x) = Ax$ . Esta função é injectiva desde que  $\det A \neq 0$  e a respectiva inversa é dada por  $f^{-1}(y) = A^{-1}y$  em que  $A^{-1}$  é a matriz inversa de  $A$ .

Note-se que uma aplicação linear é uma função de classe  $C^1$  e a respectiva derivada é representada pela matriz  $A$ , ou seja,

$$Df(x) = A$$

Note-se que neste caso se verifica a condição do Teorema da Função Inversa mas não é necessário usá-lo. Para além disso, a função inversa é global (está definida em  $\mathbb{R}^n$ ) e não apenas local.

**Exemplo 6** Consideremos o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \frac{x^4 + y^4}{x} \\ v = \sin x + \cos y \end{cases}$$

Facilmente se conclui que a resolução deste sistema para  $x$  e  $y$  não é fácil. No entanto, recorrendo ao Teorema da Função Inversa podemos determinar os pontos  $(x, y)$  para cada um dos quais o sistema é localmente invertível.

Seja

$$G(x, y) = \left( \frac{x^4 + y^4}{x}, \sin x + \cos y \right)$$

a função definida para  $x \neq 0$ . Trata-se de uma função de classe  $C^1$  no seu domínio e a sua derivada é dada por

$$DG(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3x^4 - y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{bmatrix}$$

Portanto, para cada ponto  $(x, y)$ , com  $x \neq 0$ , tal que

$$\det DG(x, y) = \frac{\sin y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x} \cos x \neq 0$$

existirá uma vizinhança em que o sistema exprime  $x$  e  $y$  como funções de  $u$  e  $v$ , ou seja  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$ .

Consideremos o ponto  $(\pi, \pi)$ . Então  $G(\pi, \pi) = (\pi^3, -1)$  e

$$\det DG(\pi, \pi) = \det \begin{bmatrix} 3\pi^2 & 4\pi^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 4\pi^2$$

e, portanto, a derivada da inversa de  $G$  no ponto  $(\pi^3, -1)$  é dada por

$$DG^{-1}(\pi^3, -1) = [DG(\pi, \pi)]^{-1} = \frac{1}{4\pi^2} \begin{bmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 3\pi^2 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\pi^3, -1) & \frac{\partial x}{\partial v}(\pi^3, -1) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\pi^3, -1) & \frac{\partial y}{\partial v}(\pi^3, -1) \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \begin{bmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 3\pi^2 \end{bmatrix}$$

\*\*\*

**Nota 2** 1. Nos casos em que  $\det DG(a) = 0$  o teorema não se aplica e tudo pode acontecer.

Considere-se a função  $G(x) = x^2$  definida em  $\mathbb{R}$ . Então  $G'(0) = 0$  e  $G$  não é invertível em nenhuma vizinhança da origem, porque se trata de uma função par.

A função  $G(x) = x^3$  é crescente e, portanto, injetiva em  $\mathbb{R}$  apesar de  $G'(0) = 0$ .

2. A demonstração do Teorema da Função Inversa pode ser vista na bibliografia da disciplina (c.f. [3, 1, 4, 2]).

Note-se que, sendo  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ , em torno de um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  será aproximada por uma função linear, ou seja, teremos

$$G(x) - G(a) \approx DG(a)(x - a).$$

Assim, sendo  $\det DG(a) \neq 0$ , a aplicação linear será invertível e, portanto, a função  $G$  também o será.

\*\*\*

## 2 Exemplos em $\mathbb{R}^3$

**Exemplo 7** Consideremos o plano em  $\mathbb{R}^3$  definido pela equação  $x + y + z = 1$ , (ver figura 6).

É claro que temos

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow z = 1 - x - y$$

e, portanto, o mesmo plano pode ser descrito de duas formas diferentes:

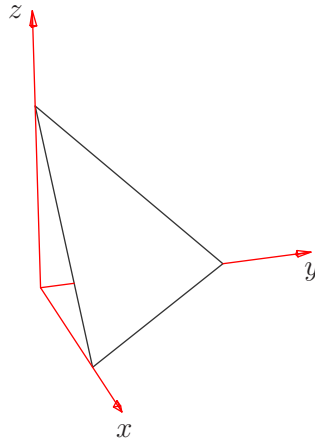


Figura 6: Plano em  $\mathbb{R}^3$  dado por  $x + y + z = 1$

- i) Como o conjunto de nível zero da função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x, y, z) = x + y + z - 1$ , ou seja, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  em que  $F(x, y, z) = 0$ .
- ii) Como o gráfico da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = 1 - x - y$ , ou seja, como o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  em que  $z = f(x, y)$ .

De outra forma, podemos dizer que a equação  $F(x, y, z) = 0$  define uma das variáveis como função das outras duas  $z = f(x, y)$ .

É claro que a mesma equação define qualquer uma das variáveis como função das duas restantes.

**Exemplo 8** Consideremos a esfera dada pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . (Ver figura 7).

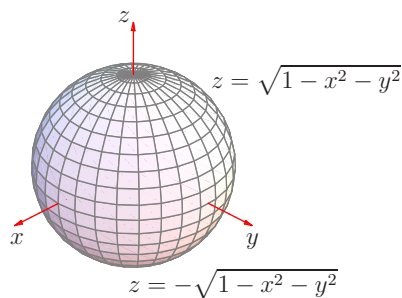


Figura 7: Esfera em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

É claro que para  $z > 0$  temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

e para  $z < 0$  temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

ou seja, a equação define a variável  $z$  como função de  $x$  e de  $y$ .

Note-se que em torno dos pontos em que  $z = 0$ , a equação não define  $z$  como função de  $x$  e de  $y$ , mas pode definir  $y$  como função de  $x$  e de  $z$  ou  $x$  como função de  $y$  e de  $z$ .

Portanto, contrariamente ao que se passa com o plano do exemplo anterior, a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  define uma das variáveis como função das restantes apenas **localmente** em torno de cada um dos pontos da esfera.

**Exemplo 9** Consideremos a linha recta definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = x, \end{cases} \quad (1)$$

ou seja, a intersecção do plano em que  $x + y + z = 1$  com o plano dado por  $y = x$ . (Ver figura 8).

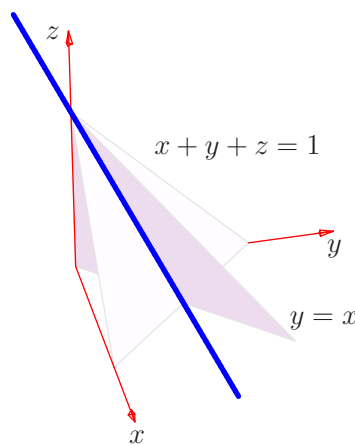


Figura 8: Recta em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $x + y + z = 1$  ;  $y = x$

É claro que temos

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x \\ y = x, \end{cases}$$

ou seja, o sistema de duas equações 1 define as variáveis  $y$  e  $z$  como funções de  $x$ .

**Exemplo 10** Consideremos a circunferência em  $\mathbb{R}^3$  que resulta da intersecção de uma esfera com um plano (ver figura 9), ou seja, definida pelo sistema de duas equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = x. \end{cases}$$

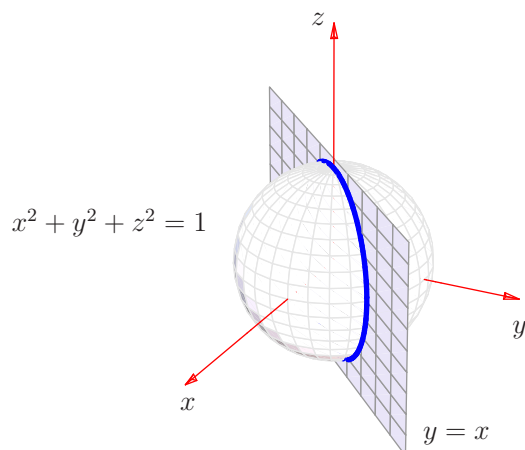


Figura 9: Circunferência em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ;  $y = x$

Para  $z > 0$ , temos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{1 - 2x^2} \\ y = x, \end{cases}$$

ou seja, o sistema de equações define, localmente em torno dos pontos em que  $z > 0$ , as variáveis  $y$  e  $z$  como funções de  $x$ .

Estes exemplos ilustram dois tipos de subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  :

- a) Definidos por uma equação  $F(x, y, z) = 0$  em que  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ .

Em que condições esta equação define, localmente, uma das variáveis com função das restantes, por exemplo  $z = f(x, y)$ ?

Quando não for possível por cálculo directo explicitar a função  $f$ , que informação sobre  $f$  pode ser obtida a partir da equação?

Se, em torno de um ponto  $(a, b, c)$  tal que  $F(a, b, c) = 0$ , tivermos a equivalência

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y),$$

então,

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

e, derivando em ordem a  $x$  e a  $y$ , obteremos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)},$$

desde que se verifique,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0.$$

É de realçar que, em certas condições, mesmo não sendo possível explicitar a função  $f$ , poderemos calcular as respectivas derivadas. Isto é particularmente notável porque podemos calcular as derivadas de uma função desconhecida.

b) Definidos por um sistema de duas equações

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

em que as funções  $F_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^1$ . Em que condições este sistema de equações define duas das variáveis como funções da terceira variável, como por exemplo  $y = f(x)$  e  $z = g(x)$ ?

Quando não for possível por cálculo directo explicitar as funções  $f$  e  $g$  que informação sobre elas pode ser obtida a partir das equações?

Se, em torno de um ponto  $(a, b, c)$  tal que  $F_1(a, b, c) = 0$  e  $F_2(a, b, c) = 0$  tivermos a equivalência

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

então, derivando o sistema

$$\begin{cases} F_1(x, f(x), g(x)) = 0 \\ F_2(x, f(x), g(x)) = 0 \end{cases}$$

em ordem a  $x$ , teremos

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b, c) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b, c)f'(a) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c)g'(a) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b, c) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b, c)f'(a) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(a, b, c)g'(a) = 0. \end{cases}$$

Na forma matricial, será

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a, b, c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b, c) \end{bmatrix}$$

e poderemos calcular as derivadas  $f'(a)$  e  $g'(a)$ , desde que se tenha

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a, b, c) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Neste caso teremos

$$\begin{bmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a, b, c) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b, c) \end{bmatrix}$$

Tal como em  $\mathbb{R}^2$  a resposta positiva às questões colocadas nos dois casos acima é dada pelo chamado Teorema da Função Implícita que, em  $\mathbb{R}^n$ , tem a forma seguinte.

**Teorema 3 (Função Implícita)** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $m < n$ , uma função de classe  $C^1$ . Seja  $(a, b) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e*

$$F(a, b) = 0 ; \quad \det DF_y(a, b) \neq 0. \quad (2)$$

*Então, existe uma função  $f$ , de classe  $C^1$ , tal que, **localmente** em torno de  $(a, b)$ , se tem*

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

**Nota 3** 1. No caso geral, temos um sistema de  $m$  equações em  $\mathbb{R}^n$  que nas condições 2 define implicitamente  $m$  variáveis, designadas por  $y$ , em função das restantes  $n - m$  variáveis, designadas por  $x$ .

2. A existência local da função  $f$  em torno de cada um dos pontos do conjunto definido pelo referido sistema de equações deve ser entendida no seguinte sentido. Existe uma bola centrada no ponto  $(a, b)$  em que o conjunto definido pela equação  $F(x, y) = 0$  é o gráfico da função  $f : B_\epsilon(a) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , em que  $\epsilon > 0$  e  $B_\epsilon(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$  designa uma bola centrada em  $a \in \mathbb{R}^{n-m}$  e raio  $\epsilon$ .
3. Usamos o símbolo  $DF_y(a, b)$  para designar a matriz das derivadas parciais da função  $F$  em ordem às variáveis designadas por  $y$ , no ponto  $(a, b)$ .
4. A demonstração do caso geral, com as devidas adaptações, faz-se seguindo a mesma ideia de  $\mathbb{R}^2$ , recorrendo ao Teorema da Função Inversa.

Seja  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a função de classe  $C^1$  dada por

$$G(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Note-se que  $G(a, b) = (a, 0)$  e

$$\det DG(a, b) = \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ D_x F(a, b) & D_y F(a, b) \end{bmatrix} = \det D_y F(a, b) \neq 0,$$

em que  $I$  designa a matriz identidade com  $(n - m)$  linhas e  $(n - m)$  colunas.

Pelo Teorema da Função Inversa,  $G$  é localmente invertível em torno do ponto  $(a, b)$ , e teremos

$$G(x, y) = (x, F(x, y)) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) = G^{-1}(x, 0),$$

ou seja, existe uma função  $f$ , localmente definida em torno do ponto  $a$ , tal que se verifica a equivalência

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Dado que  $G^{-1}$  é também de classe  $C^1$ , a função  $f$  também o será.

**Exemplo 11** Consideremos a equação

$$x^2 y + \text{sen}(x + y) = 0 \tag{3}$$

Note-se que não é fácil decidir sobre se esta equação define uma das variáveis como função da outra.

Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função de classe  $C^1$  dada por

$$F(x, y) = x^2 y + \text{sen}(x + y)$$

e consideremos o ponto  $(0, 0)$ . Então  $F(0, 0) = 0$  e

$$DF(0, 0) = \left[ 2xy + \cos(x + y) \quad x^2 + \cos(x + y) \right]_{x=0, y=0} = \left[ 1 \quad 1 \right]$$

Portanto, dado que  $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1$ , existe uma bola  $B$  centrada em  $(0,0)$  e uma função de classe  $C^1$   $f : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$  para algum  $\epsilon > 0$ , tal que  $f(0) = 0$  e

$$F(x,y) = 0 \iff y = f(x); \quad \text{em } B$$

Para além disso, temos

$$f'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = -\frac{1}{1} = -1$$

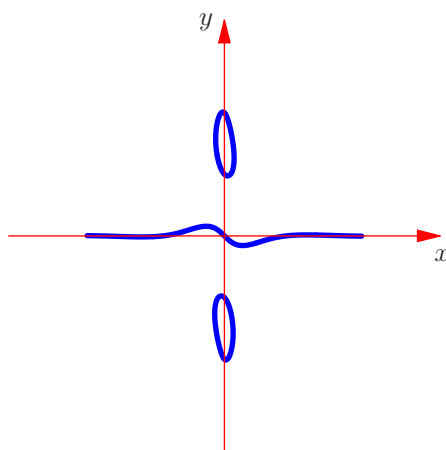


Figura 10: Parte do subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $x^2y + \text{sen}(x+y) = 0$

Do mesmo modo, dado que  $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 1$ , a equação 3 define implicitamente, localmente em torno de  $(0,0)$ , a variável  $x$  como função de  $y$ .

Na figura 10 encontra-se parte do conjunto definido pela equação 3.

**Exemplo 12** A equação

$$x^3z^2 - z^3yx = 0$$

define implicitamente  $z$  como função de  $(x,y)$  localmente em torno do ponto  $(1,1,1)$ .

Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função de classe  $C^1$  definida por

$$F(x,y,z) = x^3z^2 - z^3yx$$

Note-se que  $F(1,1,1) = 0$ . Sendo

$$DF(1,1,1) = \left[ 3x^2z^2 - z^3y \quad -z^3x \quad 2x^3z - 3z^2yx \right]_{x=1,y=1,z=1} = \left[ 2 \quad -1 \quad -1 \right]$$

e, portanto

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = -1$$

concluimos que, localmente em torno do ponto  $(1, 1, 1)$ , a equação  $F(x, y, z) = 0$  define implicitamente  $z$  como função de  $(x, y)$ . Designemos por  $f(x, y)$  essa função. Então,  $F(x, y, f(x, y)) = 0$  e derivando em  $x$ , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

e, portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -\frac{2}{-1} = 2$$

Note-se que para o ponto  $(0, 0, 0)$  temos

$$DF(0, 0, 0) = [ 0 \ 0 \ 0 ]$$

e, portanto nada podemos concluir através do Teorema da Função Implícita.

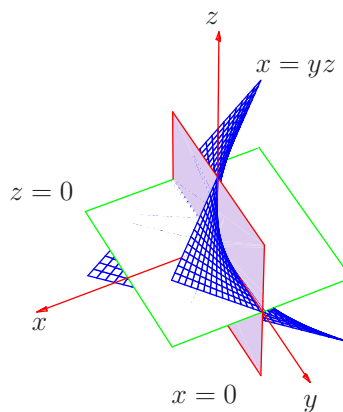


Figura 11: Subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $x^3z^2 - z^3yx = 0$

No entanto, analisando a equação, obtemos

$$x^3z^2 - z^3yx = 0 \iff xz^2(x - zy) = 0 \iff x = 0 \vee z = 0 \vee x = zy$$

e, portanto, em torno da origem não é possível exprimir nenhuma das variáveis como função das outras porque se intersectam três superfícies, como se ilustra na figura 11.

**Exemplo 13** O sistema de equações

$$\begin{cases} xu + yvu^2 = 2 \\ xu^3 + y^2v^4 = 2 \end{cases}$$

define implicitamente  $(u, v)$  como funções de  $(x, y)$  em torno do ponto  $(1, 1, 1, 1)$ .

De facto, consideremos a função  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$F(x, y, u, v) = (xu + yvu^2, xu^3 + y^2v^4)$$

Trata-se de uma função de classe  $C^1$  tal que  $F(1, 1, 1, 1) = (2, 2)$  e a respectiva derivada no ponto  $(1, 1, 1, 1)$  é dada por

$$DF(1, 1, 1, 1) = \begin{bmatrix} u & vu^2 & x + 2yvu & yu^2 \\ u^3 & 2yv^4 & 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{bmatrix}_{x=1, y=1, u=1, v=1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e, portanto

$$\det D_{uv}F(1, 1, 1, 1) = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 9$$

O Teorema da Função Implícita garante que localmente em torno do ponto  $(1, 1, 1, 1)$  temos  $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$

Derivando a função  $F$  em  $x$ , obtemos

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + u + y \frac{\partial v}{\partial x} u^2 + 2yvu \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ 3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ou seja, no ponto  $(1, 1, 1, 1)$ , temos o sistema

$$\begin{cases} 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \\ 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \end{cases}$$

de onde concluímos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{3} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = 0 \end{cases}$$

\*\*\*

## Referências

- [1] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise em  $R^n$* . AEIST, 1978.
- [2] F. R. Dias Agudo. *Cálculo Diferencial em  $R^n$* . Escolar Editora, 1977.
- [3] Luís T. Magalhães. Complementos de cálculo diferencial.
- [4] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, 1996.