

CDI-II

Integrais em Variedades. Comprimento. Área

1 Integral de Linha de um Campo Escalar. Comprimento

Sejam A e B dois pontos em \mathbb{R}^n . Designemos por $]A, B[$ o segmento de recta entre os pontos A e B . É claro que o comprimento de $]A, B[$ é dado pela norma $\|B - A\|$. O segmento de recta $]A, B[$ pode ser descrito pela parametrização $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$\gamma(t) = A + t(B - A).$$

Note-se que, sendo $\gamma'(t) = B - A$, temos

$$\|B - A\| = \int_0^1 \|B - A\| dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

e, portanto, o comprimento do segmento de recta $[A, B]$ é dado pelo integral $\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$.

Seja Γ uma linha descrita por uma parametrização $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$. Para definir o comprimento de Γ podemos recorrer ao procedimento ilustrado na figura 1.

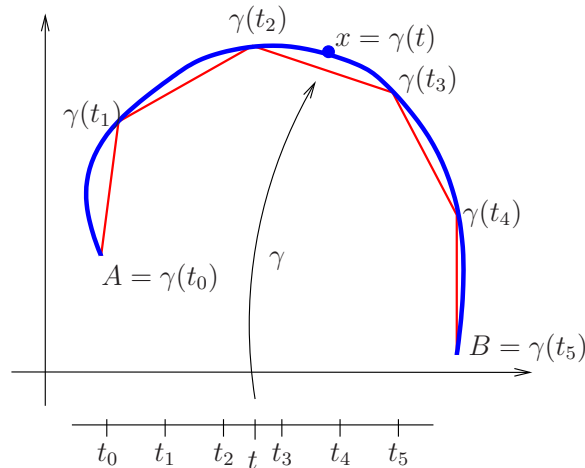


Figura 1: Comprimento de uma linha

Consideremos a linha poligonal constituída por segmentos de recta entre os pontos

$$\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_N),$$

em que $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$ com $N \in \mathbb{N}$. Note-se que na figura 1 temos $N = 5$.

É fácil aceitar que o comprimento desta linha poligonal é uma aproximação por defeito do comprimento da linha Γ . Note-se também que o comprimento da linha poligonal cresce à medida que $N \rightarrow \infty$.

Assim, se tomarmos o supremo dos comprimentos das linhas poligonais obtidas desta forma teremos uma boa definição de comprimento da linha Γ .

Dado que o comprimento da linha poligonal é dado por

$$\sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

o comprimento da linha Γ será definido por

$$l(\Gamma) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \right\}.$$

Note-se que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt$$

e, portanto,

$$\sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Assim, teremos a seguinte definição de comprimento de uma linha Γ .

Definição 1.1 *Chama-se comprimento de uma linha $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ descrita pela parametrização $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ ao integral definido por*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Tendo em conta as aplicações, vamos adoptar a seguinte definição de integral de linha de um campo escalar (c.f. [2, 3, 1]).

Definição 1.2 Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar e consideremos uma linha $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ descrita pela parametrização $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$.

Chama-se **Integral de Linha do Campo Escalar ϕ ao longo da linha Γ** ao integral definido por

$$\int_{\Gamma} \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

1.1 Aplicações

a) Comprimento de uma Linha

Seja $\phi \equiv 1$. Então, o integral de linha de ϕ

$$\int_{\Gamma} \phi = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = l(\Gamma)$$

é o comprimento da linha Γ .

b) Massa de um fio

Seja $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de comprimento do material que constitui um fio descrito por uma parametrização $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$. Então, o integral de linha de ϕ

$$\int_{\Gamma} \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = M$$

é a massa M do fio.

c) Centro de massa

Seja $\delta : S \rightarrow \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de comprimento do material que constitui um fio de massa M descrito por uma parametrização $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ e seja

$$\phi(x) = \frac{1}{M} x_i \delta(x); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

O centro de massa é o ponto de coordenadas $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ calculadas da forma seguinte

$$\bar{x}_i = \frac{1}{M} \int_a^b g_i(t) \delta(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

d) Momento de inércia

Seja L uma linha recta e designemos por $d_L(x)$ a distância do ponto $x \in \mathbb{R}^n$ à linha L .

O momento de inércia da linha Γ relativo à recta L é o integral de linha da função $\phi(x) = \delta(x)d_L^2(x)$, ou seja,

$$I_L = \int_a^b \delta(\gamma(t))d_L^2(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

1.2 Exemplos

1. Seja Γ uma circunferência de raio R e centro na origem de \mathbb{R}^2 , (ver Figura 2) e descrita por

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t) ; 0 < t < 2\pi$$

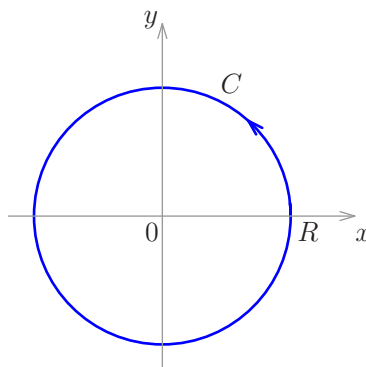


Figura 2: Uma circunferência de raio R em \mathbb{R}^2

Então, o comprimento de Γ é dado por

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} \|\gamma'(t)\|dt = \int_0^{2\pi} Rdt = 2\pi R$$

2. Consideremos a parábola P definida pela equação $y = x^2$, com $-1 < x < 1$ e que se apresenta na Figura 3.

Seja $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ a parametrização de P definida por $g(t) = (t, t^2)$.

Então,

$$\|\gamma'(t)\| = \|(1, 2t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

e, portanto, o comprimento de P será dado por

$$l(P) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

Para calcular este integral recorreremos à mudança de variável definida por $2t = \text{sh } \theta$, em que

$$\text{sh } \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

Sabendo que

$$\operatorname{ch} \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2},$$

é fácil ver que se tem

$$\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1$$

e

$$\operatorname{sh}' \theta = \operatorname{ch} \theta ; \quad \operatorname{ch}' \theta = \operatorname{sh} \theta.$$

Note-se que

$$\operatorname{sh} \theta = 0 \Leftrightarrow e^\theta = e^{-\theta} \Leftrightarrow \theta = 0$$

e

$$\operatorname{sh} \theta = 2 \Leftrightarrow e^{2\theta} - 4e^\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\theta = 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow \theta = \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned} l(P) &= 2 \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} dt = \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \operatorname{ch}^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{(2+\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1}{2(2+\sqrt{5})^2} + 2 \ln(2+\sqrt{5}) \right]. \end{aligned}$$

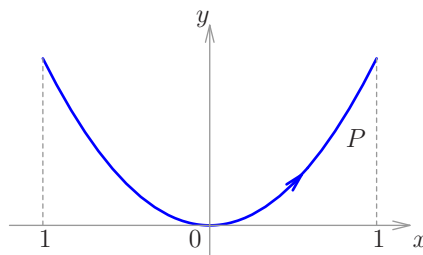


Figura 3: Uma parábola em \mathbb{R}^2

3. Seja Γ um fio de um material cuja densidade de massa é dada por

$$\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

e tem a configuração de uma espiral descrita por (ver Figura 4)

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t) ; \quad 0 < t < 4\pi.$$

Então

$$\|\gamma'(t)\| = \|(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t)\| = \sqrt{1+t^2} ; \quad \delta(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

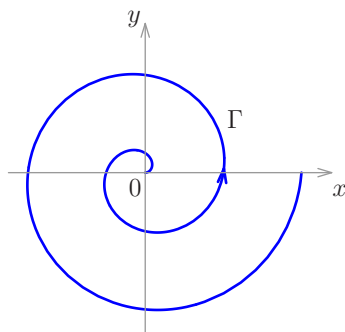


Figura 4: Uma espiral em \mathbb{R}^2

e, portanto, a massa de Γ será dada por

$$M = \int_0^{4\pi} \delta(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sqrt{1+t^2} dt = 4\pi$$

A coordenada \bar{y} do centro de massa é dada por

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} y \delta(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} t \operatorname{sen} t \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} t \operatorname{sen} t dt = -1$$

4. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ um fio de um material com densidade de massa $\delta(x, y, z) = z$ e cuja configuração é a de uma hélice cilíndrica descrita por (ver Figura 5)

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t) ; 0 < t < 4\pi$$

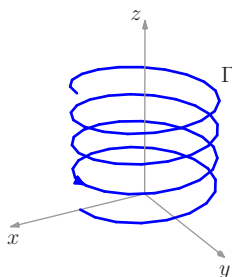


Figura 5: Hélice cilíndrica em \mathbb{R}^3

Então $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$ e o momento de inércia de Γ relativo ao eixo z é dado pelo integral de linha

$$I_z(\Gamma) = \int_{\Gamma} z(x^2 + y^2) = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} t dt = 8\sqrt{2} \pi^2$$

Nota 1.1 A fórmula do comprimento de uma linha Γ , parametrizada por uma função $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$l(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

pode ser escrita noutra forma.

De facto,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}$$

e, se tivermos em conta que a derivada $\gamma'(t)$ é representada por uma matriz com n linhas e uma coluna, teremos

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} = \sqrt{\gamma'(t)^t \gamma'(t)},$$

em que $\gamma'(t)^t$ designa a matriz transposta de $\gamma'(t)$.

Sabendo que $\gamma'(t)^t \gamma'(t)$ é uma matriz com uma linha e uma coluna, teremos

$$\gamma'(t)^t \gamma'(t) = \det(\gamma'(t)^t \gamma'(t))$$

e, portanto,

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\det(\gamma'(t)^t \gamma'(t))} dt.$$

Veremos, mais adiante, que para o cálculo da área de uma superfície ou, mais geralmente, para o cálculo do volume- m de uma variedade- m teremos uma fórmula semelhante.

1.3 Área de uma superfície

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormada em \mathbb{R}^2 e consideremos o paralelogramo determinado por dois vectores $\{t_1, t_2\}$. É sabido, da Álgebra Linear, que a área do paralelogramo é dada pelo determinante da matriz cujas colunas são os vectores t_1, t_2 escritos na base $\{e_1, e_2\}$.

Por exemplo, considerando a base canónica em \mathbb{R}^2 , a área do paralelogramo definido pelos vectores $t_1 = (2, 0)$ e $t_2 = (1, 1)$ é dada por

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Consideremos dois vectores linearmente independentes $\{t_1, t_2\}$ em \mathbb{R}^3 e o paralelogramo por eles determinado. Note-se que este paralelogramo é um subconjunto do plano gerado pelos dois vectores t_1 e t_2 . Seja P esse plano.

Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicado a $\{t_1, t_2\}$ obtemos uma base ortonormada $\{e_1, e_2\}$ de P da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{t_1}{|t_1|} \\ e_2 &= \frac{v_2}{|v_2|} \end{aligned}$$

em que

$$v_2 = t_2 - \langle t_2, e_1 \rangle e_1$$

Note-se que $\langle v_2, e_1 \rangle = 0$ e, portanto

$$|v_2|^2 = \langle v_2, t_2 \rangle = \langle t_2, t_2 \rangle - \langle t_2, e_1 \rangle^2 = |t_2|^2 - \langle t_2, e_1 \rangle^2$$

Assim, podemos exprimir t_1 e t_2 na base ortonormada $\{e_1, e_2\}$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} t_1 &= |t_1| e_1 \\ t_2 &= \langle t_2, e_1 \rangle e_1 + \sqrt{|t_2|^2 - \langle t_2, e_1 \rangle^2} e_2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} t_1 &= |t_1| e_1 \\ t_2 &= \frac{\langle t_2, t_1 \rangle}{|t_1|} e_1 + \sqrt{|t_2|^2 - \frac{\langle t_2, t_1 \rangle^2}{|t_1|^2}} e_2 \end{aligned}$$

e, portanto, a área do paralelogramo definido por t_1 e t_2 é o determinante

$$\det \begin{bmatrix} |t_1| & \frac{\langle t_2, t_1 \rangle}{|t_1|} \\ 0 & \sqrt{|t_2|^2 - \frac{\langle t_2, t_1 \rangle^2}{|t_1|^2}} \end{bmatrix} = \sqrt{|t_1|^2 |t_2|^2 - \langle t_2, t_1 \rangle^2}$$

Por outro lado, seja Δ a matriz cujas colunas são os vectores t_1 e t_2 . Então

$$\det \Delta^t \Delta = \begin{bmatrix} \langle t_1, t_1 \rangle & \langle t_1, t_2 \rangle \\ \langle t_2, t_1 \rangle & \langle t_2, t_2 \rangle \end{bmatrix} = |t_1|^2 |t_2|^2 - \langle t_2, t_1 \rangle^2$$

Assim, concluímos que a área do paralelogramo determinado pelos vectores t_1 e t_2 é dada por $\sqrt{\det \Delta^t \Delta}$.

Estas observações motivam a seguinte definição de área de uma variedade de dimensão 2 (superfície) em \mathbb{R}^3 .

Definição 1.3 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade de dimensão 2 e seja $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ a respectiva parametrização. Então*

$$\text{vol}_2(S) = \int_T \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

2 Integral de um Campo Escalar sobre uma Variedade

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão p e $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de S . Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar.

A definição de área de uma variedade de dimensão 2 em \mathbb{R}^3 é uma boa motivação para definir o integral de um campo escalar sobre uma variedade.

Definição 2.1 *Define-se o integral do campo escalar ϕ sobre S como sendo o integral*

$$\int_S \phi = \int_T \phi(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

Os casos importantes são aqueles em que $p = 1$ em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 (linhas) ou $p = 2$ em \mathbb{R}^3 (superfícies).

É fácil verificar que no caso em que $p = 1$ temos

$$\sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} = \|g'(t)\|$$

e, portanto, a definição 2.1 tem como caso particular a definição de integral de linha de um campo escalar.

De seguida apresentam-se casos de campos escalares com interesse nas aplicações em que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície descrita por uma parametrização $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$.

a) **Área:** Seja $\phi = 1$. Então, o integral de ϕ é a área de S

$$\text{vol}_2(S) = \int_S \phi = \int_T \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

b) **Massa:** Suponhamos que S representa uma folha de um material com densidade de massa por unidade de área ϕ . Então, o integral de ϕ é a massa de S

$$\mathcal{M} = \int_S \phi = \int_T \phi(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

c) **Centro de Massa:** Seja S uma folha de um material com densidade de massa α . Então, o centro de massa de S é o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ determinadas por

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_S x \alpha = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_T g_1(t) \alpha(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt \\ \bar{y} &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_S y \alpha = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_T g_2(t) \alpha(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt \\ \bar{z} &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_S z \alpha = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_T g_3(t) \alpha(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt \end{aligned}$$

- d) **Momento de Inércia relativo a uma linha recta:** Seja L uma linha recta e S uma folha de um material com densidade α . Então, o momento de inércia de S relativo a L é o integral

$$I_L(S) = \int_S \alpha d_L^2 = \int_T \alpha(g(t)) d_L^2(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt$$

em que d_L designa a distância à linha L .

2.1 Exemplos

- i) Consideremos a superfície esférica de raio R e centrada na origem que designaremos por S^2 .

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

Seja $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função dada por

$$g(\theta, \phi) = (R \sen \phi \cos \theta, R \sen \phi \sen \theta, R \cos \phi)$$

em que

$$T =]0, 2\pi[\times]0, \pi[\subset \mathbb{R}^2$$

Então g é uma função de classe C^1 , injectiva, cuja derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -R \sen \phi \sen \theta & R \cos \phi \cos \theta \\ R \sen \phi \cos \theta & R \cos \phi \sen \theta \\ 0 & -R \sen \phi \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois e

$$g(T) = S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 : y = 0 ; x \geq 0\} = S^2 \setminus N$$

ou seja, g é uma parametrização de $S^2 \setminus N$. (Ver figura 6).

Note-se que

$$Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} R^2 \sen^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$$

e, portanto

$$\sqrt{\det Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi)} = R^2 \sen \phi$$

Sendo N uma semicircunferência sobre S^2 , temos

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(S^2) = \text{vol}_2(S^2 \setminus N) &= \int_T \sqrt{\det Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi)} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi R^2 \sen \phi d\phi \right) d\theta \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sen \phi d\phi \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

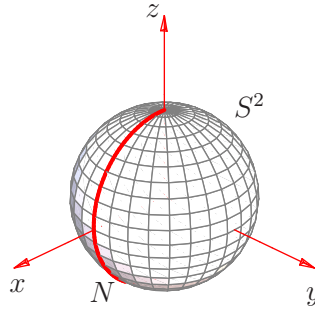


Figura 6: Parametrização da esfera

ii) Consideremos a superfície definida por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z < 1\}$$

Em coordenadas cilíndricas, P é descrita pela equação $z = \rho^2$.

Portanto, consideremos a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2)$$

em que

$$T =]0, 1[\times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$$

Esta função é de classe C^1 , injetiva e a sua derivada

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ 2\rho & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois. Para além disso,

$$g(T) = P \setminus \{(x, y, z) \in P : x \geq 0 ; y = 0\} = P \setminus N$$

Portanto, a função g é uma parametrização de $P \setminus N$. (Ver figura 7).

Note-se que

$$Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} 1 + 4\rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\sqrt{\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta)} = \rho \sqrt{1 + 4\rho^2}$$

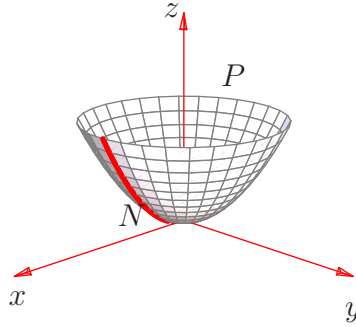


Figura 7: Parametrização de um parabolóide

Sendo N uma linha sobre P , temos,

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_2(P) = \text{vol}_2(P \setminus N) &= \int_T \sqrt{\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta)} d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \right) d\theta \\
 &= \frac{\pi}{6} \int_0^1 12\rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \\
 &= \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1)
 \end{aligned}$$

iii) Seja C a superfície cônica definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} = z < 1\}$$

Em coordenadas cilíndricas C é descrita pela equação $z = \rho$ e, portanto, tal como no exemplo anterior, consideremos a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho)$$

em que

$$T =]0, 1[\times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$$

Esta função é de classe C^1 , injectiva e a sua derivada

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois. Para além disso,

$$g(T) = C \setminus \{(x, y, z) \in M : x \geq 0 ; y = 0\} = C \setminus N$$

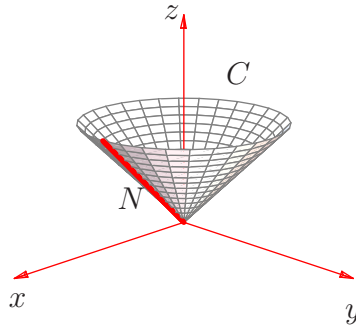


Figura 8: Parametrização de um cone

Portanto, a função g é uma parametrização de $C \setminus N$. (Ver figura 8).

Note-se que

$$\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta) = \sqrt{2} \rho$$

Sendo N um segmento de recta sobre C , temos,

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(C) = \text{vol}_2(C \setminus N) &= \int_T \sqrt{\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta)} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{2} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \sqrt{2} \pi \int_0^1 2\rho d\rho \\ &= \sqrt{2} \pi \end{aligned}$$

iv) Consideremos a porção do plano, representado na figura 9, definido por

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 ; x > 0 ; y > 0 ; z > 0\}$$

e a respectiva parametrização $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

em que

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 ; 0 < y < 1 - x\}.$$

Sendo

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

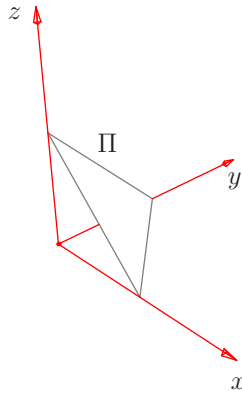


Figura 9: Parametrização de um plano

obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_2(\Pi) &= \int_T \sqrt{3} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \sqrt{3} dy \right) dx \\
 &= \sqrt{3} \int_0^1 (1-x) dx \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

v) Consideremos o toro com raios R e r definido por

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

ou seja, a superfície que se obtém fazendo rodar em torno do eixo z a circunferência no plano xz com centro em $(R, 0)$ e raio r e descrita pelo ângulo ϕ , contado a partir do plano $z = 0$ no sentido positivo. Designemos por θ o ângulo de rotação em torno do eixo z e medido a partir do eixo x no sentido positivo.

Seja

$$D = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < 2\pi\}$$

e $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, \phi) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi)$$

Facilmente se verifica que g é de classe C^1 e injetiva e a respectiva derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -(R + r \cos \phi) \sin \theta & -r \sin \phi \cos \theta \\ (R + r \cos \phi) \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ 0 & r \cos \phi \end{bmatrix}$$

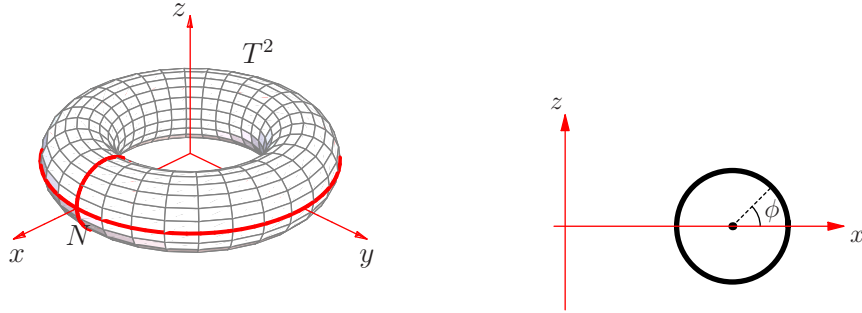


Figura 10: Parametrização de um toro

tem característica igual a dois. Portanto, g é uma parametrização de

$$T^2 \setminus N$$

em que

$$N = \{(x, y, z) : z = 0\} \cup \{(x, y, z) : y = 0\}$$

tal como se representa na figura 10.

Sendo N a união de duas linhas em T^2 , temos

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(T^2) = \text{vol}_2(T^2 \setminus N) &= \int_D \sqrt{\det Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi)} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} r(R + r \cos \phi) d\theta \right) d\phi \\ &= 4\pi^2 Rr \end{aligned}$$

vi) Consideremos a superfície dada por

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1, 0 < z < 1\}$$

e que representa uma folha de um material com densidade de massa dada por

$$\alpha(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2z^2 + 1}}.$$

Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) esta superfície é descrita pela equação $\rho^2 = z^2 + 1$ e, portanto, consideremos a função $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = ((\sqrt{z^2 + 1}) \text{sen } \theta, (\sqrt{z^2 + 1}) \text{cos } \theta, z)$$

em que

$$T = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi ; 0 < z < 1\}$$

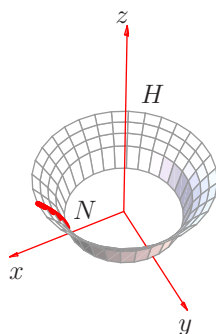


Figura 11: Parametrização de um hiperbolóide

Então, g é de classe C^1 , injectiva e a respectiva derivada

$$Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} -(\sqrt{z^2 + 1}) \operatorname{sen} \theta & \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \cos \theta \\ (\sqrt{z^2 + 1}) \cos \theta & \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois, ou seja é uma parametrização de $H \setminus N$ em que

$$N = \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\}$$

tal como se representa na figura 11.

A massa de C é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \int_C \alpha &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \alpha(g(\theta, z)) \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)} dz \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2z^2 + 1}} \sqrt{2z^2 + 1} dz \right) d\theta \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

A coordenada \bar{z} do centro de massa de C é dada por

$$\begin{aligned} \bar{z} = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_C z\alpha &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 g_3(\theta, z) \alpha(g(\theta, z)) \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)} dz \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 z dz \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Seja $d_z(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a distância ao eixo z . O momento de inércia de C relativo ao eixo z é dado por

$$\begin{aligned} I_z = \int_C \alpha d_z^2 &= \int_T \alpha(g(\theta, z)) d_L^2(g(\theta, z)) \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)} d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (z^2 + 1) dz \right) d\theta \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Referências

- [1] Tom M. Apostol. *Calculus II*. Editorial Reverté, SA, 1977.
- [2] Luís T. Magalhães. *Integrais em Variedades e Aplicações*. Texto Editora, 1993.
- [3] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman and Company, 1998.