Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise
Prof. Gabriel Pires

CDI-II

Funções Integráveis

Um dos objectivos da teoria do integral é a definição e cálculo de comprimentos de linhas, áreas de superfícies e volumes de sólidos. Para isso partimos de conjuntos básicos, como sejam segmentos de recta, rectângulos e paralelipípedos, e que serão designados por intervalos. Nestes casos as noções de comprimento, área e volume são bastante simples e intuitivas.

1 Intervalos. Partições. Funções em Escada

Definição 1 *(cf. [2, 1, 3, 4]) Um intervalo aberto em* $\mathbb{R}^n$ *é um conjunto da forma*

$$I = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_k < x_k < b_k \ ; \ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

em que $-\infty \leq a_k < b_k \leq +\infty \ ; \ k = 1, 2, \ldots, n$.

Se designarmos por $A_k =]a_k, b_k[$ (intervalo aberto em $\mathbb{R}$), teremos

$$I = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

e dizemos que I é o produto cartesiano das suas arestas A_k.

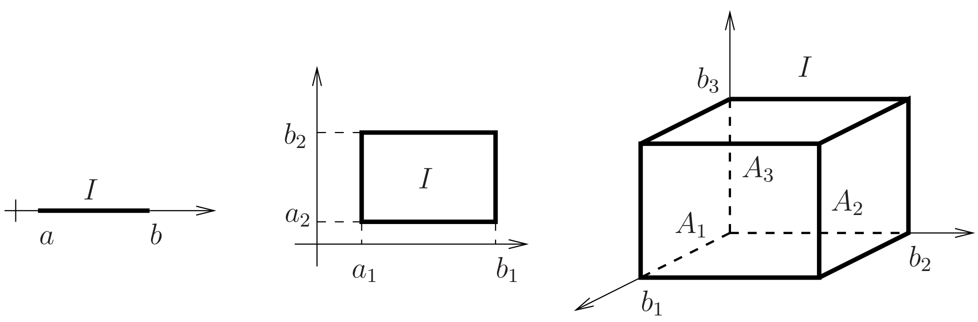

Figura 1: Intervalos em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

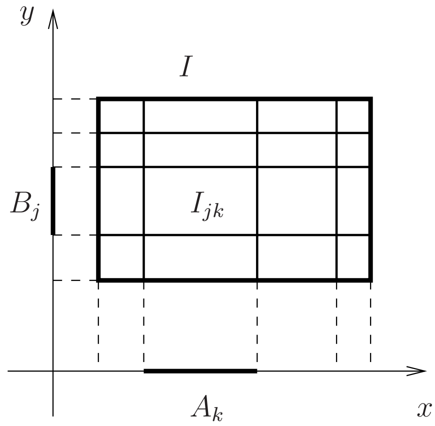

Figura 2: Partição de um intervalo em $\mathbb{R}^2$

Note-se que em $\mathbb{R}^2$ um intervalo é um rectângulo cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados. Em $\mathbb{R}^3$ trata-se de um paralelipípedo cujas faces são paralelas aos planos coordenados e cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados.

No caso em que $-\infty < a_k < b_k < +\infty$; $k = 1, 2, \ldots, n$, diz-se que I é um intervalo limitado.

Na figura (1) representam-se exemplos de intervalos limitados em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

***

Definição 2 *Dado um intervalo limitado* $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, *uma partição de* I *é uma colecção finita de pontos* $P = \{p_0 < p_1 < \ldots < p_m\}$; $m \in \mathbb{N}$, *em que* $a = p_0$ *e* $b = p_m$.

Note-se que esta colecção de pontos determina outra colecção de sub-intervalos $\{I_k \,;\, k = 1, 2, \ldots, m\}$ definidos por $]I_k = {}_{k-1}, p_k[$. Assim, a partição P pode ser identificada com a colecção finita de sub-intervalos $\{I_k\}_{k=1}^{m}$ cuja união é o intervalo I.

Uma partição de um intervalo limitado $I = A_1 \times A_2$ em $\mathbb{R}^2$ é o produto $P = P_1 \times P_2$ em que P_k é uma partição da aresta A_k; ; $k = 1, 2$. Sejam m_1 e m_2, respectivamente, o número de sub-intervalos de P_1 e P_2. Tal como no caso anterior, a partição P pode ser identificada com uma colecção de sub-intervalos que denotaremos por $\{I_{j,k}\}_{j,k=1}^{m_1,m_2}$.

Na figura (2) representa-se uma partição de um intervalo em $\mathbb{R}^2$. Cada sub-intervalo da partição I_{jk} é o produto de duas arestas, A_k e B_j, ou seja, $I_{jk} = A_k \times B_j$, tal como se ilustra na figura.

Do mesmo modo, dado um intervalo limitado $I = A_1 \times A_2 \times A_3$ em $\mathbb{R}^3$, uma partição de I é o produto $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ em que P_k é uma partição da aresta A_k; ; $k = 1, 2, 3$.

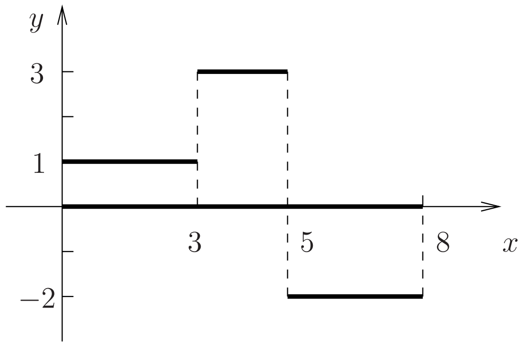

Figura 3: Exemplo de uma função em escada em $\mathbb{R}$

Tal como nos casos anteriores, podemos identificar P com uma colecção de sub-intervalos $\{I_{jkl}\}_{j,k,l=1}^{m_1,m_2,m_3}$.

Assim, de uma forma geral, uma partição de um intervalo limitado I pode ser definida por uma colecção de sub-intervalos $\{I_k\}_{k=1}^{N}$ em que $N < \infty$ tais que

$$I = \cup_{k=1}^{N} I_k$$

***

Definição 3 *Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um* **intervalo limitado**. *Diz-se que $s : I \to \mathbb{R}$ é uma função em escada em I se existir uma partição de I, $\{I_k\}_{k=1}^{N}$ e uma colecção de números reais $\{s_k\}_{k=1}^{N}$, tais que $s(x) = s_k$ se $x \in int(I_k)$, em que $int(I_k)$ designa o interior de I_k.*

***

Dadas duas funções em escada $s : I \to \mathbb{R}$ e $t : I \to \mathbb{R}$, definidas nas partições P_s P_t, respectivamente, existe uma partição P comum às duas. Basta considerar em cada aresta do intervalo I a união das correspondentes partições das duas funções. Deste modo, obtemos uma partição com mais pontos ou, equivalentemente, com mais intervalos que são sub-intervalos das partições das duas funções.

Assim, sem perda de generalidade, podemos considerar que as duas funções estão definidas na mesma partição.

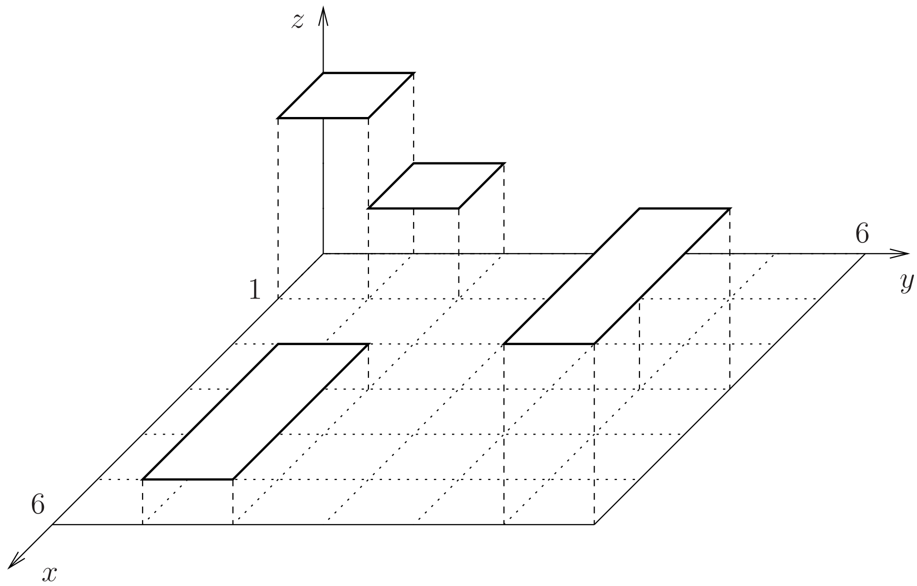

Figura 4: Exemplo de uma função em escada em $\mathbb{R}^2$

Definição 4 *Dado um intervalo limitado, $I \subset \mathbb{R}^n$, chama-se volume de I à quantidade*

$$\mathrm{vol}(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

Definição 5 *Dada uma função em escada, $s : I \to \mathbb{R}$, chama-se integral de s em I à quantidade*

$$\int_I s = \sum_{k=1}^{N} s_k \,\mathrm{vol}(I_k)$$

Em $\mathbb{R}$, o integral de uma função em escada $s : I \to \mathbb{R}$, com $I = [a, b]$ será designado pelos símbolos

$$\int_I s = \int_a^b s(x)dx.$$

No caso de uma função em escada $s : I \to \mathbb{R}$ com $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, (ver figuras

2, 4) teremos

$$\int_I s = \sum_j \sum_k s_{jk} \operatorname{vol}(I_{jk}) = \sum_j \sum_k s_{jk} \operatorname{vol}(A_k) \operatorname{vol}(B_j),$$

em que s_{jk} designa o valor de s no sub-intervalo $I_{jk} = A_k \times B_j$.

Neste caso o integral de uma função em escada $s : I \to \mathbb{R}$, será designado pelos símbolos

$$\int_I s = \int_I s(x,y)dxdy.$$

Note-se que a soma dupla pode ser efectuada de duas formas,

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k s_{jk} \operatorname{vol}(A_k) \operatorname{vol}(B_j) &= \sum_j \left(\sum_k s_{jk} \operatorname{vol}(A_k) \right) \operatorname{vol}(B_j) = \\ &= \sum_k \left(\sum_j s_{jk} \operatorname{vol}(B_j) \right) \operatorname{vol}(A_k). \end{aligned}$$

Note-se também que, para cada $a \leq x \leq b$, a função $y \mapsto s(x,y)$ é uma função em escada. Do mesmo modo, para cada $c \leq y \leq d$, a função $x \mapsto s(x,y)$ é uma função em escada.

Dado que A_k é a aresta de I_{jk} na direcção Ox teremos

$$\sum_k s_{jk} \operatorname{vol}(A_k) = \int_a^b s(x,y)dx.$$

Nesta soma, y está fixo na aresta B_j e, do mesmo modo, sendo B_j a aresta na direcção Oy, teremos

$$\sum_j s_{jk} \operatorname{vol}(B_j) = \int_c^d s(x,y)dy$$

em que x está fixo na aresta A_k.

Assim, o integral de s em $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, pode ser calculado de duas formas diferentes:

1. $\displaystyle\int_I s = \int_I s(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d s(x,y)dy \right) dx$
2. $\displaystyle\int_I s = \int_I s(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b s(x,y)dx \right) dy.$

***

Dadas duas funções em escada s e t, é claro que a função $as + bt$, em que a e b são números reais, é também uma função em escada e o respectivo integral é dado por

$$\int_I (as + bt) = a \int_I s + b \int_I t.$$

***

Exemplo 1.1 Seja $I =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ e $s : I \to \mathbb{R}$ a função, cujo gráfico se apresenta na figura (3), definida por

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 3, & \text{se } \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \\ -2, & \text{se } \frac{2}{3} < x < 1. \end{cases}$$

Trata-se de uma função em escada cujo integral é dado por

$$\int_I s = \int_I s(x)dx = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) - 2 \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$$

***

Exemplo 1.2 Seja $I =]0, 6[\times]0, 6[\subset \mathbb{R}^2$ e $s : I \to \mathbb{R}$ a função em escada dada por

$$s(x, y) = \begin{cases} 4, & \text{se } 0 < x < 1\,;\ 0 < y < 1 \\ 2, & \text{se } 0 < x < 1\,;\ 1 < y < 2 \\ 1, & \text{se } 3 < x < 6\,;\ 1 < y < 2 \\ 4, & \text{se } 3 < x < 6\,;\ 5 < y < 6 \\ 0, & \text{nos restantes casos} \end{cases}$$

cujo gráfico se apresenta na figura (4).

O integral de s em I é dado por

$$\int_I s = \int_I s(x, y)dxdy = 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4 = 21$$

***

Exemplo 1.3 Seja $I =]0, 1[\times]0, 2[\times]1, 2[\subset \mathbb{R}^3$ e $s : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$s(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1\,;\ 0 < y < 2\,;\ 1 < z < \frac{3}{2} \\ 2, & \text{se } 0 < x < 1\,;\ 0 < y < 2\,;\ \frac{3}{2} < z < 2 \end{cases}$$

O integral de s em I é dado por

$$\int_I s = \int_I s(x, y, z)dxdydz = 1 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$$

***

2 Funções Integráveis

Sabendo, por definição, calcular volumes de intervalos compactos e integrar funções em escada coloca-se a questão de fazer o mesmo para outros conjuntos compactos e encontrar critérios que nos permitam decidir sobre a existência do integral de uma dada função bem como a forma de calcular o respectivo integral.

Sendo as funções em escada limitadas iremos, a partir destas, definir o integral de funções limitadas.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada e definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$. Consideremos o conjunto das funções em escada $s : I \to \mathbb{R}$ tais que $s \leq f$ e o conjunto das funções em escada $t : I \to \mathbb{R}$ tais que $f \leq t$.

Devemos notar que estes conjuntos não são vazios porque a função f é limitada. De facto, sabendo que existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in I$, as funções constantes $s(x) = -M$ e $t(x) = M$ verificam a condição $s \leq f \leq t$.

Tal como em $\mathbb{R}$, o integral em $\mathbb{R}^n$ será definido recorrendo às funções em escada que verificam a condição $s \leq f \leq t$. (cf. [2, 1, 3, 4])

Definição 6 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada e definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é integrável em I se tivermos*

$$\sup_{s \leq f} \int_I s = \inf_{t \geq f} \int_I t.$$

O respectivo integral é o número real

$$\int_I f = \sup_{s \leq f} \int_I s = \inf_{t \geq f} \int_I t.$$

Notemos que as funções em escada são naturalmente integráveis face a esta definição.

Na figura (5) encontra-se um exemplo de uma função limitada $f : I \to \mathbb{R}$ e uma função em escada $s : I \to \mathbb{R}$ tal que $s \leq f$, com $I \subset \mathbb{R}^2$, para ilustração da definição de integral.

Por definição de ínfimo e de supremo, é claro que, dado $\epsilon > 0$, deverão existir duas funções em escada $s : I \to \mathbb{R}$ e $t : I \to \mathbb{R}$, tais que $s \leq f \leq t$ e

$$\int_I (t - s) < \epsilon \Leftrightarrow \int_I t < \int_I s + \epsilon.$$

Note-se que, em $\mathbb{R}$, o integral $\int_I (t - s)$ mede a área compreendida entre os gráficos de s e de t, tal como se ilustra na figura (6). Em $\mathbb{R}^n$ esse integral mede o volume do conjunto compreendido entre os gráficos de s e de t.

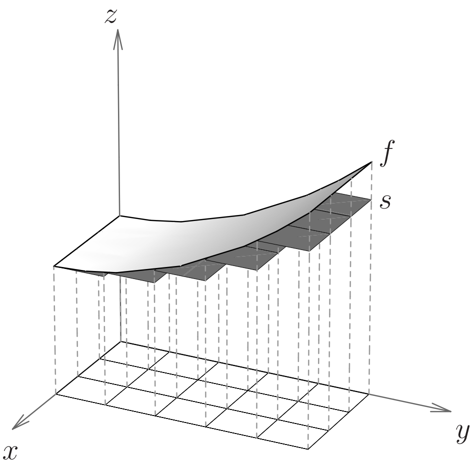

Figura 5: Exemplo de uma função em escada $s \leq f$

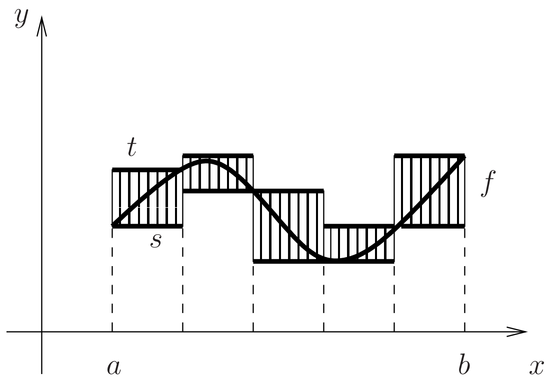

Figura 6: A área entre os gráficos de s e t deve ser inferior a ϵ

Podemos concluir que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ será integrável se para um dado $\epsilon > 0$ existirem duas funções em escada $s, t : I \to \mathbb{R}$ tais que $s \leq f \leq t$ e que o volume do conjunto compreendido entre os respectivos gráficos seja inferior a ϵ.

***

Da definição de função integrável podemos deduzir algumas propriedades úteis.

1. Dadas duas funções integráveis $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ e dado $\epsilon > 0$, sejam s_f, s_g, t_f, t_g funções em escada tais que $s_f \leq f \leq t_f$, $s_g \leq g \leq t_g$ e

$$\int_I (t_f - s_f) < \frac{\epsilon}{2}\,; \quad \int_I (t_g - s_g) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, temos

$$\int_I (t_f + t_g) = \int_I t_f + \int_I t_g < \int_I s_f + \int_I s_g + \epsilon = \int_I (s_f + s_g) + \epsilon$$

e, como $s_f + s_g \leq f + g \leq t_f + t_g$, concluímos que a função $f + g$ é também integrável em I e

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g.$$

Do mesmo modo, a função af, em que $a \in \mathbb{R}$, é também uma função integrável em I e

$$\int_I af = a \int_I f.$$

2. Dadas duas funções integráveis $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ tais que $f \leq g$, então $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$.

   De facto, se $s : I \to \mathbb{R}$ for uma função em escada e $s \leq f$ então $s \leq g$. Por outro lado, se $t : I \to \mathbb{R}$ for uma função em escada e $t \geq g$, então $t \geq f$.

   Portanto,

$$\sup_{s \leq f} \int_I s \leq \sup_{s \leq g} \int_I s \; ; \quad \inf_{t \geq f} \int_I t \leq \inf_{t \geq g} \int_I t,$$

   ou seja,

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

3. Dada uma função integrável $f : I \to \mathbb{R}$, consideremos as funções f^+ e f^- definidas em I por,

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

   e

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \\ 0, & \text{se } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

   Note-se que f^+ e f^- são ambas funções não negativas e facilmente se constata que

$$f = f^+ - f^- \; ; \quad |f| = f^+ + f^-.$$

   Sejam $s, t : I \to \mathbb{R}$ duas funções em escada tais que $s \leq f \leq t$ e consideremos as funções em escada s^+, s^-, t^+, t^- definidas por

$$s^+ = \begin{cases} s, & \text{se } f \geq 0 \\ 0, & \text{se } f < 0 \end{cases} \; ; \qquad t^+ = \begin{cases} t, & \text{se } f \geq 0 \\ 0, & \text{se } f < 0 \end{cases}$$

e

$$s^- = \begin{cases} -t, & \text{se } f \leq 0 \\ 0, & \text{se } f > 0 \end{cases} ; \qquad t^- = \begin{cases} -s, & \text{se } f \leq 0 \\ 0, & \text{se } f > 0. \end{cases}$$

Facilmente se conclui que estas funções em escada são não negativas e verificam as relações seguintes,

$$s^+ \leq f^+ \leq t^+ \; ; \quad s^- \leq f^- \leq t^- \; ; \quad t - s = (t^+ - s^+) + (t^- - s^-).$$

Assim,

$$\int_I (t-s) = \int_I (t^+ - s^+) + \int_I (t^- - s^-)$$

e, portanto, a função f é integrável se e só se as funções f^+ e f^- também o forem.

Dado que $|f| = f^+ + f^-$, é claro que se f for integrável, então $|f|$ também será integrável.

Tendo em conta que $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$, temos

$$\int_I f \leq \int_I |f| \; ; \quad -\int_I f \leq \int_I |f|,$$

ou seja,

$$|\int_I f| \leq \int_I |f|.$$

***

Teorema 1 Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, dado $\epsilon > 0$, existirá uma partição $\{I_k\}_{k=1}^N$ do intervalo I tal que, em cada um dos respectivos sub-intervalos, teremos

$$\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f < \epsilon, \quad k = 1, \dots N. \tag{1}$$

A propriedade (1) das funções contínuas encontra-se ilustrada na figura (7). Note-se que a diferença $\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f$ é sempre inferior a ϵ, em todos os sub-intervalos da partição.

À diferença $\sup\limits_A f - \inf\limits_A f$ chamamos **oscilação** de f no conjunto A e será designada pelo símbolo $o(f, A)$.

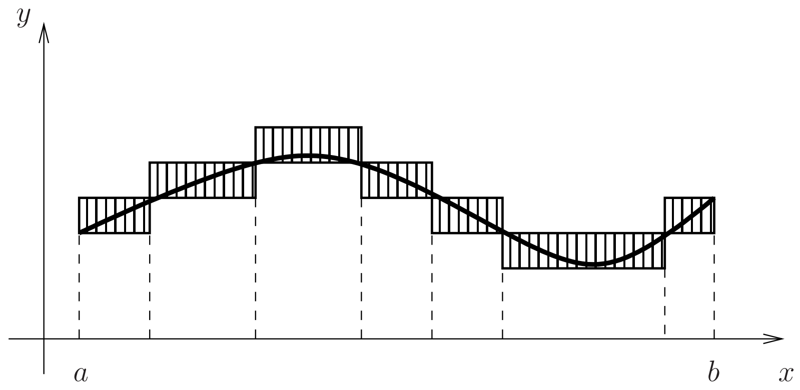

Figura 7: Oscilação de uma função contínua num intervalo compacto

Se esta propriedade não se verificasse, então existiria $\epsilon > 0$ tal que para qualquer partição $\{I_k\}_{k=1}^N$ de I teríamos $o(f, I_k) > \epsilon$, em algum sub-intervalo I_k dessa partição.

Consideremos a partição de I que se obtém dividindo ao meio cada uma das respectivas arestas e seja I_1 o sub-intervalo em que a oscilação de f é superior a ϵ. Seja a_1 um ponto desse sub-intervalo. Se repetirmos este processo para o intervalo I_1, obteremos um intervalo $I_2 \subset I_1$ em que a oscilação de f é superior a ϵ e seja a_2 um ponto de I_2.

Repetindo este processo, teremos uma sucessão de sub-intervalos

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots,$$

e uma sucessão de pontos $a_j \in I_j$ que, por construção, será limitada.

Por ser limitada, essa sucessão terá uma subsucessão convergente, também designada por a_j. Seja a o respectivo limite.

Dado que f é uma função contínua, seja I_m o sub-intervalo em que $|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Então, para quaisquer $x, y \in I_m$, teríamos

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ou seja, a oscilação de f em I_m seria inferior a ϵ.

Mas, por construção, a oscilação de f em I_m é superior a ϵ. Desta contradição concluímos que a propriedade deve verificar-se.

***

Dado $\epsilon > 0$ consideremos a partição $\{I_k\}_{k=1}^N$ do intervalo I tal que, em cada um dos respectivos sub-intervalos, tenhamos

$$\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f < \frac{\epsilon}{\text{vol}(I)}, \quad k = 1, \ldots N.$$

Sejam $s, t : I \to \mathbb{R}$ as funções em escada que no interior de cada I_k assumem, respectivamente, o ínfimo e o supremo de f nesse sub-intervalo e assumem, respectivamente o ínfimo e o supremo de f em I nas arestas de I_k.

Por definição, temos $s \leq f \leq t$ e, para além disso,

$$\int_I (t - s) = \sum_{k=1}^{N} (\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f) \operatorname{vol}(I_k) < \epsilon,$$

ou seja, f é integrável em I.

Temos assim um bom critério que permite decidir sobre se uma dada função é integrável.

Teorema 2 *Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é integrável em I.*

***

Note-se que as funções em escada são integráveis mas podem ser descontínuas nas arestas dos sub-intervalos da partição do respectivo intervalo de definição.

Note-se que uma aresta de um intervalo em $\mathbb{R}^2$ é um segmento de recta e estará contida num intervalo de área arbitrariamente pequena. Na figura (8) está representado um segmento de recta A e um intervalo $I =]a, b[\times]c, d[$ em que $d - c < \dfrac{\epsilon}{b - a}$.

Dado $\epsilon > 0$, temos $A \subset I$ e $\operatorname{vol}(I) < \epsilon$. Podemos, assim, dizer de uma forma intuitiva que uma aresta de um intervalo em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto que não tem área.

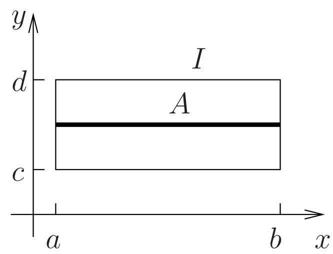

Figura 8: $A \subset I$; $\operatorname{vol}(I) < \epsilon$

Por outro lado, as arestas dos intervalos são gráficos de funções contínuas.

Vamos ver, de seguida, que o gráfico de uma função contínua $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ não tem volume em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$. Invocando o teorema (1), dado $\epsilon > 0$, seja $\{I_k\}_{k=1}^N$ a partição de I tal que, em cada um dos respectivos sub-intervalos, se verifique

$$\sup_{I_k} \phi - \inf_{I_k} \phi < \frac{\epsilon}{\operatorname{vol}(I)}.$$

Assim, é claro que o gráfico de ϕ,

$$G(\phi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = \phi(x)\},$$

estará contido na união finita de intervalos de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujo volume será menor do que ϵ, porque

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}(I_k) \frac{\epsilon}{\mathrm{vol}(I)} = \epsilon,$$

tal como se ilustra na figura (7).

Definição 7 Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem **conteúdo nulo** se, dado $\epsilon > 0$, existe uma colecção finita de intervalos $\{I_k\}_{k=1}^{N}$ tais que

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k \; ; \quad \sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}(I_k) < \epsilon.$$

Com esta definição, temos uma propriedade interessante do gráfico de uma função contínua.

Teorema 3 O gráfico de uma função contínua $\phi : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida num intervalo compacto I, tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^{n+1}$.

***

Exemplo 2.1 Um conjunto constituído por um número finito de pontos em $\mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo.

De facto, seja $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ esse conjunto, com $N < \infty$, e sejam $I_1, I_2, \ldots, I_N$ intervalos centrados nos pontos de A tais que $\mathrm{vol}(I_k) < \epsilon/N$, $k = 1, 2, \ldots, N$, tal como se ilustra na figura (9) para $N = 4$ em $\mathbb{R}^2$.

Assim, temos

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k \; ; \quad \sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}(I_k) < \sum_{k=1}^{N} \frac{\epsilon}{N} = \epsilon.$$

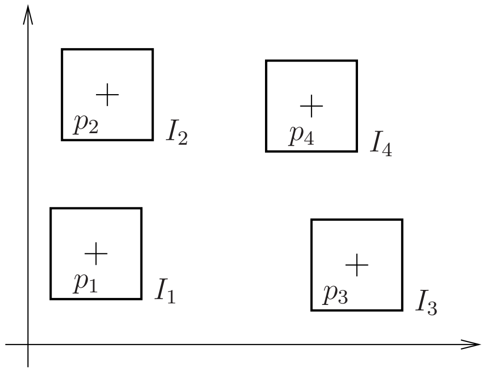

Figura 9: Um conjunto finito de pontos tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^n$

Exemplo 2.2 Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_N$ conjuntos de conteúdo nulo em $\mathbb{R}^n$. Então, dado $\epsilon > 0$, seja $\{I_{kj}\}_{j=1}^{m_k}$ a colecção de intervalos tal que

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} I_{kj} \ ; \quad \sum_{j=1}^{m_k} \mathrm{vol}(I_{kj}) < \frac{\epsilon}{N}.$$

Assim, para a colecção de todos os intervalos I_{kj} com $k = 1, \ldots, N$ e $j = 1, \ldots, m_k$, temos

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_k \subset \bigcup_{k=1,j=1}^{N m_k} I_{kj} \ ; \quad \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} \mathrm{vol}(I_{kj}) < \epsilon.$$

Podemos então concluir que a **união finita de conjuntos de conteúdo nulo é também um conjunto de conteúdo nulo**.

Exemplo 2.3 A fronteira de cada um dos conjuntos seguintes tem conteúdo nulo porque se trata da união finita de conjuntos de conteúdo nulo, nomeadamente, gráficos de funções contínuas definidas em conjuntos compactos.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 1\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \ ; \ -1 < z < 1\}$

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z^2 \ ; \ -1 < z < 1\}$

f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$

g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < 1\}$

h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$

i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-3)^2+z^2 < 1\}$

Mais geralmente, a fronteira de um conjunto limitado e definido por um sistema de inequações que envolvam funções contínuas tem conteúdo nulo.

***

De seguida, veremos que uma função limitada $f : I \to \mathbb{R}$ e contínua excepto num conjunto de conteúdo nulo, é integrável em I (cf. [2, 1, 3, 4]).

De facto, seja D o conjunto dos pontos em que f é descontínua e seja $\{I_k\}_{k=1}^N$ a partição do intervalo I tal que a soma dos volumes dos sub-intervalos que contêm D seja menor que ϵ e tal que, em cada um dos restantes sub-intervalos, a oscilação de f seja também menor que ϵ.

Note-se que, por definição, dado $\epsilon > 0$ para cada ponto $x \in I$ em que f é contínua existe uma bola $B_\delta(x) \subset I$ em que a oscilação de f é menor do que ϵ. Portanto, existe um intervalo $I(x) \subset B_\delta(x)$, centrado em x, em que a oscilação de f é menor do que ϵ.

Assim, é claro que a colecção de intervalos

$$\{I_k\}_{k=1}^N \cup \{I(x)\}_{x \in I \setminus D}$$

constitui uma cobertura de I.

Sendo I um intervalo compacto, existirá um número finito de pontos $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ em $I \setminus D$ tais que

$$I \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N \cup I(x_1) \cup I(x_2) \cup \cdots \cup I(x_p).$$

Dado que, por ser limitada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, sejam $s, t : I \to \mathbb{R}$ as funções em escada definidas por

$$s(x) = -M\,; \quad t(x) = M$$

nos sub-intervalos I_k e assumindo, respectivamente, o ínfimo de f e o supremo de f em cada um dos restantes sub-intervalos $I(x_j)$.

Assim, teremos $s \leq f \leq t$ em I e, para além disso,

$$\int_I (t-s) \leq \sum_{k=1}^N 2M\epsilon + \sum_{j=1}^p \epsilon \operatorname{vol}(I(x_j)) \leq 2M\epsilon + \epsilon \operatorname{vol}(I) = (\operatorname{vol}(I) + 2M)\epsilon,$$

ou seja, f é integrável em I.

Teorema 4 *Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, excepto num conjunto de conteúdo nulo. Então f é integrável em I.*

***

Devemos notar que se uma função limitada $f : I \to \mathbb{R}$ for integrável em I, então, por definição, dados dois reais arbitrários $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ existirão duas funções em escada $s, t : I \to \mathbb{R}$ definidas numa partição (I_k) de I, tais que $s \leq f \leq t$ e

$$\int_I (t - s) < \epsilon\delta.$$

Nesta partição designemos por $\tilde{I}_k$ os sub-intervalos em que a oscilação de f é superior a ϵ.

Assim, dado que $s \leq f \leq t$, teremos

$$\epsilon\delta > \int_I (t - s) = \sum_k (t_k - s_k) \operatorname{vol}(I_k) \geq \sum_k (t_k - s_k) \operatorname{vol}(\tilde{I}_k) \geq \epsilon \sum_k \operatorname{vol}(\tilde{I}_k).$$

Para os sub-intervalos em que a oscilação de f é superior a ϵ, teremos

$$\sum_k \operatorname{vol}(\tilde{I}_k) \leq \delta,$$

e nos restantes sub-intervalos da partição de I a oscilação de f será inferior a ϵ.

Isto quer dizer que as funções integráveis só poderão ser descontínuas em conjuntos com volume pequeno. Os conjuntos de conteúdo nulo são exemplos de tais conjuntos.

Dada uma função integrável $f : I \to \mathbb{R}$ resta saber como se calcula o respectivo integral. Esta questão será resolvida pelo chamado teorema de Fubini.

3 Cálculo do integral. Teorema de Fubini

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^2$ dado por $I = [a, b] \times [c, d]$.

Suponhamos que, para cada $x \in [a, b]$ a função $y \mapsto f(x, y)$ é integrável em $[c, d]$. Seja $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ o respectivo integral (cf. [1, 3]).

Suponhamos que a função $x \mapsto A(x)$ é integrável em $[a, b]$.

Sejam $s, t : I \to \mathbb{R}$ duas funções em escada tais que $s \leq f \leq t$. Note-se que, para cada $x \in [a, b]$, as funções $y \mapsto s(x, y)$ e $y \mapsto t(x, y)$ são funções em escada e temos

$$\int_c^d s(x, y)dy \leq \int_c^d f(x, y)dy \leq \int_c^d t(x, y)dy,$$

ou seja,
$$\int_c^d s(x,y)dy \leq A(x) \leq \int_c^d t(x,y)dy.$$

Integrando a função $x \mapsto A(x)$ no intervalo $[a,b]$, obtemos
$$\int_a^b \left(\int_c^d s(x,y)dy\right)dx \leq \int_a^b A(x)dx \leq \int_a^b \left(\int_c^d t(x,y)dy\right)dx. \tag{2}$$

Para qualquer função em escada $s : I \to \mathbb{R}$ temos
$$\int_I s = \sum_{j,k} s_{jk}\operatorname{vol}(I_{jk} = \sum_k \left(\sum_j s_{jk}\operatorname{vol}(Q_j)\right)\operatorname{vol}(P_k),$$

em que a colecção de sub-intervalos $I_{jk} = P_k \times Q_j$, com arestas P_k e Q_j, é uma partição de I e $s = s_{kj}$ em I_{jk}.

Note-se que nesta soma dupla, a soma em j é feita mantendo k fixo. Trata-se, então, de uma soma dupla iterada no sentido em que uma é feita depois da outra. Sendo P_k a aresta de I_{jk} na direcção Ox e Q_j a aresta na direcção Oy, iremos denotar o integral de s em I da seguinte forma:
$$\int_I s = \sum_k \left(\sum_j s_{jk}\operatorname{vol}(Q_j)\right)\operatorname{vol}(P_k) = \int_a^b \left(\int_c^d s(x,y)dy\right)dx.$$

Do mesmo modo, teremos
$$\int_I s = \sum_j \left(\sum_k s_{jk}\operatorname{vol}(P_k)\right)\operatorname{vol}(Q_j) = \int_c^d \left(\int_a^b s(x,y)dx\right)dy.$$

Portanto,
$$\int_I s \leq \int_a^b A(x)dx \leq \int_I t,$$
ou seja,
$$\int_I s \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx\right)dx \leq \int_I t.$$

Dado que as funções s e t foram escolhidas arbitrariamente, teremos
$$\int_I f = \int_I f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Podemos então dizer que o integral de f em I pode ser calculado através do **integral duplo iterado**, no sentido em que, se integra primeiro f como função apenas de y e o resultado disso, $A(x)$, se integra de seguida em x.

Assim, sob certas condições, o integral de uma função limitada num intervalo compacto pode ser calculado através de um integral múltiplo iterado que consiste numa sequência de integrais simples numa variável tendo fixado as restantes.

Temos, assim, o chamado teorema de Fubini.

Teorema 5 *(cf. [1, 3]) Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e integrável em* $I = [a, b] \times [c, d]$. *Suponhamos que*

1. *Para cada* $x \in [a, b]$ *a função* $y \mapsto f(x, y)$ *é integrável em* $[c, d]$.

   Seja $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ *o respectivo integral.*

2. *A função* $x \mapsto A(x)$ *é integrável em* $[a, b]$.

Então,

$$\int_I f(x, y)dxdy = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

É claro que podemos trocar os papéis de x e de y, obtendo

$$\int_I f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

***

Assim, o teorema de Fubini estabelece um procedimento de cálculo do integral de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ num intervalo $I = [a, b] \times [c, d]$, recorrendo a duas integrações sucessivas apenas numa variável.

Para o integral da forma

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx,$$

1. Fixamos a variável x em $[a, b]$ e calculamos o integral da função de uma variável $y \mapsto f(x, y)$ em $[c, d]$. Obtemos então a função $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy.$$

2. Calculamos o integral da função A no intervalo $[a, b]$ e obtemos o integral da função f em I,

$$\int_I f(x,y)dxdy = \int_a^b A(x)dx.$$

De forma semelhante e com as respectivas trocas de variáveis e intervalos temos o procedimento para o cálculo do integral da forma

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

***

Em $\mathbb{R}^3$ teremos $f : I \to \mathbb{R}$ em que $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ e, portanto,

1. Fixamos a variável x em $[a, b]$ e a variável y em $[c, d]$ e calculamos o integral da função de uma variável $z \mapsto f(x, y, z)$ no intervalo $[e, f]$. Obtemos então a função $A : [e, f] \to \mathbb{R}$ definida por

$$A(z) = \int_B f(x,y,z)dxdy$$

em que $B = [a, b] \times [c, d]$.

2. Para calcular o integral $A(z) = \int_B f(x, y, z)dxdy$ recorremos ao teorema de Fubini em $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$A(z) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

3. Calculamos o integral da função A no intervalo $[e, f]$ e obtemos o integral da função f em I,

$$\int_I f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f A(z)dz = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz.$$

***

Temos assim, duas formas de calcular o integral em $\mathbb{R}^2$ e seis formas em $\mathbb{R}^3$. É também claro que este raciocínio pode ser refeito em $\mathbb{R}^n$ com $n > 3$.

O teorema de Fubini permite então relacionar o integral em $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, com o integral em $\mathbb{R}$. Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$ e uma função integrável, o integral $\int_I f$ pode ser calculado por integrações sucessivas numa variável estando as restantes fixas.

Os integrais da forma $\displaystyle\int_A \left[\int_B f(x,y)dy\right] dx$ ou $\displaystyle\int_B \left[\int_A f(x,y)dx\right] dy$ são designados por **integrais iterados**. No primeiro integral, fixa-se $x \in A$ e procede-se ao cálculo do integral de f como função de y em B, obtendo-se, assim, uma função de x a qual, de seguida, é integrada em A. No segundo integral procede-se do mesmo modo trocando os papéis das variáveis x e y.

Podemos assim dizer que o integral de f em I se obtém por sucessivas integrações numa variável mantendo as restantes fixas.

***

Note-se que se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, então a função $y \mapsto f(x,y)$ é também contínua e, portanto, integrável em $[c,d]$, ou seja, a função $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ está bem definida em $[a,b]$.

Sejam $x \in [a,b]$ e h tal que $x+h \in [a,b]$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição do intervalo I tal que, em cada um dos correspondentes sub-intervalos a oscilação de f é inferior a ϵ.

Então, para h tal que os pontos (x,y) e $(x+h,y)$ estejam no mesmo sub-intervalo da partição, teremos $|f(x+h,y) - f(x,y| < \epsilon$ e, consequentemente,

$$|A(x+h) - A(x)| = |\int_c^d (f(x+h,y) - f(x,y)dy| \leq \int_c^d |f(x+h,y) - f(x,y|dy < (d-c)\epsilon.$$

No caso em que (x,y) e $(x+h,y)$ não estão no mesmo sub-intervalo, então (x,y) estará na fronteira de um sub-intervalo e teremos $|f(x+h,y) - f(x,y| < 2\epsilon$, e a conclusão será a mesma.

Assim, a função $A(x)$ será contínua e, por isso, integrável em $[a,b]$.

Portanto, as duas condições do teorema de Fubini são automaticamente verificadas para funções contínuas.

***

Exemplo 3.1 Seja a função $f(x,y) = xy$ definida no intervalo $I = [0,2] \times [0,1]$.

Sendo contínua é integrável no intervalo compacto I. Para o cálculo do respectivo integral recorremos ao teorema de Fubini.

Fixando $0 \leq x_0 \leq 2$, a função de uma variável $f(x_0, y) = x_0 y$ é contínua e, por isso, é integrável em $[0,1]$ e o respectivo integral dado por

$$A(x_0) = \int_0^1 x_0 y dy = x_0 \int_0^1 y dy = \frac{x_0}{2}.$$

Sendo $A(x) = \dfrac{x}{2}$ uma função contínua, é integrável em $[0,1]$.

Então,

$$\int_I f = \int_0^2 A(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = 1.$$

Exemplo 3.2 Seja a função $f(x,y) = e^{x+y}$ definida no intervalo $I = [0,1] \times [1,2]$.

Dado que se trata de uma função contínua é integrável em I. Facilmente se verificam as condições do teorema de Fubini e teremos

$$\int_I f = \int_1^2 \left(\int_0^1 e^{x+y} dx \right) dy = \int_1^2 (e-1) e^y dy = e(e-1)^2.$$

Exemplo 3.3 O integral da função $f(x,y,z) = xy + e^z$ definida no intervalo $I = [0,1] \times [0,2] \times [0,1]$ é dado por

$$\int_I f = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 (xy + e^z) dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^2 (xy + e - 1) dy \right) dx = 2e - 1.$$

Exemplo 3.4 Consideremos a função $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{se } y > x^2 \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta função é contínua excepto na linha dada pela equação $y = x^2$, que tem conteúdo nulo porque é o gráfico da função contínua $\phi(x) = x^2$.

Podemos então concluir que a função f é integrável em $I = [0,1] \times [0,1]$ e para o cálculo do respectivo integral recorremos ao teorema de Fubini.

Para cada $0 \leq x = x_0 \leq 1$ fixo, teremos

$$f(x_0, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < y < x_0^2 \\ x_0 y, & \text{se } x_0^2 < y < 1, \end{cases}$$

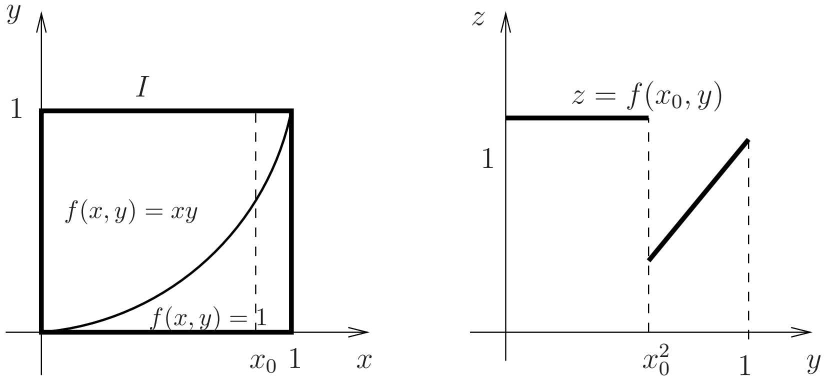

Figura 10: Função descontínua na parábola $y = x^2$

que, como função de y, é integrável por ser descontínua apenas no ponto $y = x_0^2$ e, portanto,

$$A(x_0) = \int_0^1 f(x_0, y)dy = \int_0^{x_0^2} dy + \int_{x_0^2}^1 x_0 y dy = x_0^2 + \frac{x_0^2}{2}(1 - x_0^4).$$

Na figura (10) apresenta-se o intervalo I, em que se indicam os valores da função em cada uma das regiões separadas pela parábola definida por $y = x^2$, e o gráfico da função de uma variável $y \mapsto f(x_0, y)$ em que x_0 está fixo no intervalo $[0, 1]$.

A função $A(x) = x^2 + \frac{x^2}{2}(1 - x^4)$ é contínua e, por isso, integrável no intervalo $[0, 1]$.

Assim,

$$\int_I f = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{x^2}{2}(1 - x^4))dx = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 3.5 Consideremos a função $\chi : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y > x^2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tal como no exemplo anterior, esta função é contínua excepto na linha dada pela equação $y = x^2$, que tem conteúdo nulo porque é o gráfico da função contínua $\phi(x) = x^2$.

Assim, a função χ é integrável em $I = [0, 1] \times [0, 1]$ e para o cálculo do respectivo integral recorremos ao teorema de Fubini.

Para cada $0 \leq x = x_0 \leq 1$ fixo, teremos

$$\chi(x_0, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < y < x_0^2 \\ 1, & \text{se } x_0^2 < y < 1, \end{cases}$$

que, como função de y, é integrável por ser descontínua apenas no ponto $y = x_0^2$ e, portanto,

$$A(x_0) = \int_0^1 \chi(x_0, y)dy = \int_{x_0^2}^1 dy = 1 - x_0^2.$$

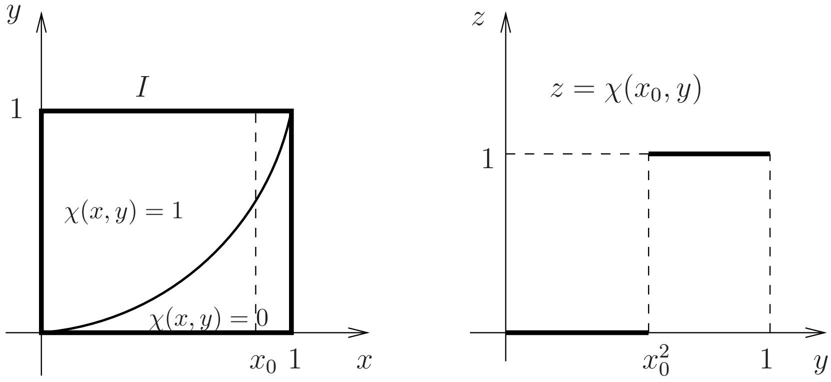

Figura 11: Função descontínua na parábola $y = x^2$

Na figura (3.5) apresenta-se o intervalo I, em que se indicam os valores da função em cada uma das regiões separadas pela parábola definida por $y = x^2$, bem como o gráfico da função $y \mapsto \chi(x_0, y)$.

A equação $x = x_0$ descreve uma recta vertical (paralela ao eixo Oy). Então, fixar $x = x_0$ no intervalo I corresponde a intersectá-lo com uma recta vertical de que resulta um segmento de recta vertical.

A função χ é nula para $y < x^2$ e, por isso, no cálculo de $A(x_0)$ tem contribuição apenas a parte do segmento de recta em que $y > x_0^2$.

Dado que a função $A(x) = 1 - x^2$ é contínua, será integrável no intervalo $[0, 1]$ e teremos,

$$\int_I \chi = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 (1 - x^2)dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

***

4 Integral em conjuntos limitados. Volumes em $\mathbb{R}^n$

Uma das aplicações do teorema de Fubini é o cálculo de volumes de subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$.

É claro que se $I \subset \mathbb{R}^n$ for um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ for a função em escada definida por $f(x) = 1$, então

$$\mathrm{vol}_n(I) = \int_I f.$$

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e cuja fronteira tenha conteúdo nulo. Um conjunto limitado por gráficos de funções contínuas será naturalmente um dos exemplos mais importantes.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função limitada e seja I um intervalo compacto tal que $D \subset I$.

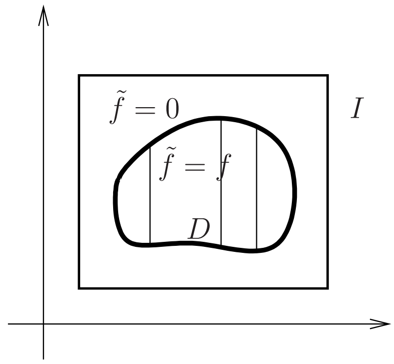

Figura 12: Extensão de uma função definida em D a um intervalo compacto I

Consideremos a função $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I \setminus D, \end{cases} \tag{3}$$

tal como se ilustra na figura (12).

É claro que se $\tilde{f}$ for uma função descontínua apenas num conjunto de conteúdo nulo, será integrável em I.

Podemos, assim, estabelecer a definição de integral de uma função limitada num conjunto limitado.

Definição 8 *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função limitada e I um intervalo compacto tal que $D \subset I$.*

Se $\tilde{f}$ for integrável no intervalo I, diz-se que f é integrável em D e,

$$\int_D f = \int_I \tilde{f}.$$

Tal como para um intervalo, o volume de um conjunto limitado será definido à custa do integral da função constante e igual a um nesse conjunto.

Definição 9 *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e seja I um intervalo compacto tal que $D \subset I$.*

O volume do conjunto D é o integral

$$\mathrm{vol}_n(D) = \int_I \chi,$$

em que $\chi : I \to \mathbb{R}$ é a chamada ***função característica*** *do conjunto D, definida por*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in D \\ 0, & se\ x \in I \setminus D. \end{cases}$$

O volume de um conjunto limitado, cuja fronteira seja constituída por gráficos de funções contínuas, fica perfeitamente definido. De facto, a função χ será contínua excepto na respectiva fronteira e, por isso, será integrável em I.

Este integral será calculado recorrendo ao teorema de Fubini, ou seja, recorrendo ao cálculo de integrais iterados.

Note-se que, por definição de função característica, temos $\tilde{f} = f\chi_D$ e, portanto,

$$\int_D f = \int_I \tilde{f} = \int_I f\chi_D.$$

Dado que a função χ é nula no complementar do conjunto D, a contribuição para o integral será nula. Fica então claro que a determinação da fronteira do conjunto é essencial para efectuar os cálculos dos integrais iterados.

No exemplo (3.5) encontra-se descrito o cálculo da área do conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 1\ ;\ 0 < x < 1\},$$

através do integral iterado da forma $\int \left(\int \chi(x, y)dy\right) dx$.

Sendo $D \subset I = [0, 1] \times [0, 1]$, a função $\chi : I \to \mathbb{R}$ é descontínua na parábola descrita pela equação $y = x^2$.

Para calcular o integral iterado, fixa-se $x = x_0$ no intervalo $[0, 1]$ e calcula-se

$$A(x_0) = \int_0^1 \chi(x_0, y)dy,$$

ou seja, considera-se a função χ restringida ao conjunto descrito pela equação $x = x_0$.

Recorde-se que ao fixar $x = x_0$ no intervalo I obtemos um segmento de recta vertical.

Dado que função χ é nula para $y < x^2$, no cálculo de $A(x_0)$ tem contribuição apenas a parte do segmento de recta em que $y > x_0^2$. Assim,

$$A(x_0) = \int_0^1 \chi(x_0, y)dy = \int_{x_0^2}^1 dy = 1 - x_0^2.$$

Finalmente, a área é dada pelo integral

$$\mathrm{vol}_2(D) = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 dy\right) dx = \int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3}. \tag{4}$$

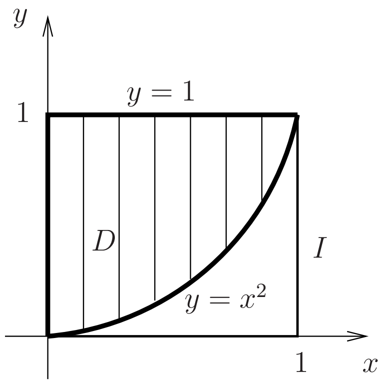

Figura 13: Cortes verticais em D

Em resumo, para calcular a área do conjunto D é essencial descrevê-lo como uma colecção de segmentos de recta verticais sendo cada um deles descrito pela equação $x = x_0$, em que $0 < x_0 < 1$, tal como se ilustra na figura (13).

É claro que cada um destes segmentos de recta resultam da intersecção do conjunto D com a recta dada pela equação $x = x_0$, ou seja, é o conjunto

$$C(x) = D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0\}.$$

Sendo vertical, o conjunto $C(x)$ é perpendicular ao eixo Ox.

Note-se que os pontos extremos do segmento de recta $C(x)$ são, respectivamente, (x_0, x_0^2) e $(x_0, 1)$, ou seja, são pontos da fronteira do conjunto D.

Se fizermos $a = 0\,, b = 1$ e se definirmos as funções $c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $c(x) = x^2$ e $d(x) = 1$, respectivamente, teremos

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \ ; \ c(x) < y < d(x)\}, \tag{5}$$

ou seja, o conjunto D é, de facto, uma colecção de segmentos de recta perpendiculares ao eixo Ox entre os pontos da fronteira $(x, c(x))$ e $(x, d(x))$, respectivamente.

Assim, a área do conjunto D será dada pelo integral iterado,

$$\mathrm{vol}_2(D) = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} dy \right) dx.$$

Mais geralmente, dada uma função integrável $f : D \to \mathbb{R}$, o respectivo integral será dado por

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Assim, para calcular o integral iterado da forma $\int \left(\int dy \right) dx$, o conjunto D deve ser descrito como uma colecção de segmentos de recta perpendiculares ao eixo Ox, ou seja, da forma (5), tal como se ilustra na figura (13).

***

Pelo teorema de Fubini, o cálculo do integral de uma função num conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ faz-se recorrendo ao cálculo dos integrais iterados. Os integrais iterados são obtidos fixando variáveis, ou seja, é essencial determinar os conjuntos da forma

$$D \cap \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = c\},$$

com $c \in \mathbb{R}$.

Definição 10 Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, ao conjunto $C(x_k)$, com $k = 1, 2, \ldots, n$, definido por

$$C(x_k) = D \cap \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = c\},$$

em que $c \in \mathbb{R}$, chamamos **corte em D perpendicular ao eixo Ox_k**.

Nos exemplos de aplicação do teorema de Fubini veremos em detalhe como se descreve um conjunto como colecção de cortes, especialmente em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$.

Em muitos casos, a descrição de um conjunto como colecção de cortes pode levar à necessidade de dividi-lo em subconjuntos disjuntos. Suponhamos que $D = D_1 \cup D_2$.

Seja ϕ uma função escalar. Da definição de função característica de um conjunto, é claro que

$$\phi = \phi\chi_{D_1} + \phi\chi_{D_2}.$$

Tendo em conta as propriedades das funções integráveis concluímos que

$$\int_D \phi = \int_D \phi\chi_{D_1} + \int_D \phi\chi_{D_2} = \int_{D_1} \phi + \int_{D_2} \phi.$$

***

Apresentam-se, de seguida, exemplos de funções importantes pelo significado físico do respectivo integral.

a) **Volume**

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$. Então, o integral $\int_D f = \mathrm{vol}_n(D)$ é o volume do conjunto D.

b) **Massa**

Seja $\sigma : D \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de volume do material que constitui um corpo representado pelo conjunto D. Então, a massa M do corpo D é dada pelo integral $M = \int_D \sigma$.

c) **Centro de massa**

Seja $\sigma : D \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de volume do material que constitui um corpo representado pelo conjunto D, e seja

$$f(x) = \frac{1}{M} x_i \sigma(x); \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

O centro de massa é o ponto de coordenadas $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ calculadas da forma seguinte

$$\overline{x}_i = \frac{1}{M} \int_D f \ ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

d) **Momento de inércia**

Seja L uma linha recta e designemos por $d_L(x)$ a distância do ponto $x \in \mathbb{R}^n$ à linha L.

O momento de inércia do conjunto D relativo à recta L designado pelo símbolo I_L, é o integral da função definida por $f(x) = \sigma(x) d_L^2(x)$, ou seja,

$$I_L = \int_D f$$

em que σ é a densidade de massa por unidade de volume de D.

Os casos importantes a considerar são aqueles em que L é um dos eixos coordenados.

***

5 Integrais Paramétricos. Regra de Leibniz

Surgem na prática certas funções que são definidas através do integral de outras funções e coloca-se a questão de saber se são ou não contínuas, se são ou não diferenciáveis. Em certas condições, a regra de Leibniz estabelece que a derivada de uma função definida por um integral é o integral da derivada.

Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e consideremos a função $F : B \to \mathbb{R}$ definida pelo integral

$$F(x) = \int_0^1 f(t,x) dt.$$

Ao integral $\int_0^1 f(t,x)dt$ chamamos **integral paramétrico** em que a variável x desempenha o papel de parâmetro.

Recordando o contexto do teorema de Fubini, é claro que a função F é contínua. Veremos que, em certas condições, também é diferenciável e a respectiva derivada é dada por

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) dt.$$

Vamos supor que f e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ são funções contínuas.
Assim, para cada $x \in [0,1]$, temos:

a) A função $f(t,x)$ é integrável em $[0,1]$ como função de t.

b) A derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ é integrável em $[0,1]$ como função de t.

Estas duas condições serão imediatamente satisfeitas pelas funções de classe C^1.
Assim, teremos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 (f(t,x+h)-f(t,x))\,dt \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \left(\int_x^{x+h} \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)ds \right) dt \end{aligned}$$

e, aplicando o teorema de Fubini, obtemos

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)dt \right) ds.$$

Do teorema fundamental do cálculo em $\mathbb{R}$, obtemos a chamada **regra de Leibniz**,

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

***

É claro que este raciocínio se generaliza para os casos em que $x \in I \subset \mathbb{R}^n$, sendo I um intervalo compacto. Nesses casos, teremos,

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(t,x)dt\ ; \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

***

Sejam $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis e consideremos a função definida pelo integral

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)dt.$$

Note-se que a função F pode ser vista como a composição

$$F(x) = G(x, \phi(x), \psi(x))$$

em que $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$G(x, u, v) = \int_u^v f(t, x)dt.$$

Assim, derivando a função composta e tendo em conta a regra de Leibniz e o teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\phi'(x) + \frac{\partial G}{\partial v}\psi'(x) \\ &= \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt - f(u, x)\phi'(x) + f(v, x)\psi'(x) \\ &= \int_{\phi(x)}^{\phi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt - f(\phi(x), x)\phi'(x) + f(\psi(x), x)\psi'(x) \end{aligned}$$

***

Exemplo 5.1 Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pelo integral

$$F(x) = \int_0^1 \operatorname{sen}(xt^2)dt.$$

Note-se que não é fácil calcular o integral por não termos à disposição uma primitiva para a função $\operatorname{sen}(xt^2)$. No entanto, recorrendo à regra de Leibniz, teremos

$$F'(x) = \int_0^1 t^2 \cos(xt^2)dt$$

e, então,

$$F'(0) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

***

Exemplo 5.2 Consideremos a função definida por

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{1+xt^2}\, dt \; ; \quad x \geq 1.$$

A respectiva derivada será dada por

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{x^2} t^2 e^{1+xt^2}\, dt + 2xe^{1+x^5} \\ &= \frac{x^2}{2x} e^{1+x^5} - \frac{1}{2x} \int_0^{x^2} e^{1+xt^2}\, dt + 2xe^{1+x^5} \\ &= \frac{5x}{2} e^{1+x^5} - \frac{1}{2x} F(x) \end{aligned}$$

e, então, a função F e a respectiva derivada verificam a equação

$$F'(x) + \frac{1}{2x} F(x) = \frac{5x}{2} e^{1+x^5}.$$

***

Exemplo 5.3 Consideremos um campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, e fechado, isto é,

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \; ; \; k \neq j.$$

Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o campo escalar definido por

$$\phi(x) = \int_0^1 F(tx) \cdot x dt.$$

Notando que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F(tx) \cdot x) = \sum_{k=1}^{n} t \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx) x_k + F_j(tx),$$

e sendo F um campo fechado, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F(tx) \cdot x) = \frac{d}{dt}(tF_j(tx)).$$

Pela regra de Leibniz,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_j(tx)) dt = F_j(x) \; ; \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

ou seja, o campo vectorial F é o gradiente do campo escalar ϕ,

$$F = \nabla \phi.$$

***

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus II.* Editorial Reverté, SA, 1977.

[2] Luís T. Magalhães. *Integrais Múltiplos.* Texto Editora, 1996.

[3] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus.* W. H. Freeman and Company, 1998.

[4] H. A. Priestley. *Introduction to Integration.* Oxford, Clarendon Press, 1997.