Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise
Prof. Gabriel Pires

CDI-II

Limites. Continuidade

1 Introdução

O assunto central do Cálculo em $\mathbb{R}^n$ é o estudo de funções cujos domínios são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, ou seja, funções de várias variáveis (c.f. [2, 3, 1]). Nas aplicações, estas funções desempenham papéis muito importantes no estabelecimento de modelos matemáticos de fenómenos físicos, químicos, económicos, financeiros e outros.

As grandezas físicas tais como a densidade de massa, a temperatura, a pressão e o volume, também designadas por grandezas escalares, são matematicamente traduzidas em funções que dependem de várias outras grandezas, por exemplo, as coordenadas que indicam a posição dos objectos em estudo e o instante de observação ou medição. Neste caso temos funções cujos domínios são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e contradomínios em $\mathbb{R}$ a que chamaremos funções escalares.

As grandezas tais como a velocidade e a aceleração do movimento de uma partícula, a força de interacção entre corpos com massa ou carga eléctrica são matematicamente traduzidas em funções de várias outras variáveis e assumindo valores que são vectores. Temos assim as chamadas funções vectoriais.

Portanto, em geral estamos interessados em estudar funções definidas em $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^m$.

Tal como para o estudo de funções reais de variável real, é necesário ter presente a estrutura algébrica e topológica de $\mathbb{R}^n$. Os conceitos de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade dependem crucialmente dessas estruturas.

Assim, $\mathbb{R}^n$ será o produto cartesiano de n factores todos iguais a $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R},$$

munido da sua estrutura vectorial usual resultante da soma de vectores e multiplicação por escalares. Os elementos ou vectores $x \in \mathbb{R}^n$ serão também identificados pelas respectivas componentes na base canónica, ou seja,

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \ ; \ x_k \in \mathbb{R} \ ; \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Os casos muito importantes nas aplicações são $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ cujos vectores serão designados por (x, y) e por (x, y, z), respectivamente.

2 Norma. Distância. Bola

Tal como em $\mathbb{R}$, o conceito essencial de limite de uma sucessão depende da noção de distância entre pontos. Em $\mathbb{R}$ esse papel é desempenhado pelo conceito de módulo, isto é,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se}\, x \geq 0 \\ -x, & \text{se}\, x < 0. \end{cases}$$

Em $\mathbb{R}^n$, o conceito fundamental é o de norma de um vector: $\|x\|$.

Definição 1 *Dado um vector $x \in \mathbb{R}^n$, a respectiva norma é o escalar*

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Para os dois casos importantes $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, teremos

1. $\mathbb{R}^2 : \quad \| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $\mathbb{R}^3 : \quad \| (x, y, z) \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Definição 2 1. *Chama-se **distância** entre dois pontos x e y em $\mathbb{R}^n$ ao escalar*

$$\| x - y \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

2. *Chama-se **bola** de centro num ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e raio R ao conjunto dado por*

$$B_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| < R\}$$

Na figura(1) está representada uma bola de raio R e centro no ponto (a, b) em $\mathbb{R}^2$.

3 Interior, Exterior e Fronteira

Dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ e tendo a noção de bola centrada num ponto iremos definir as noções de interior, exterior e fronteira desse conjunto. Assim, teremos,

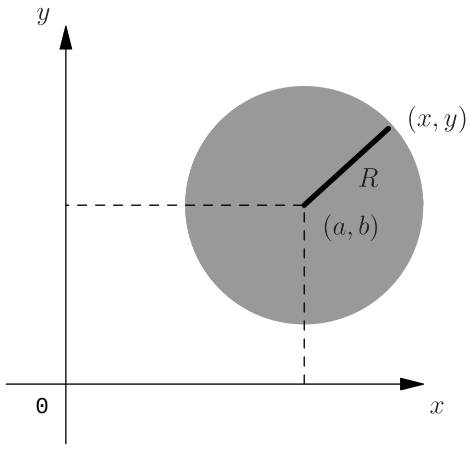

Figura 1: $\mathbb{R}^2$: Bola centrada em (a, b) e raio R

Definição 3 *i) Diz-se que* $a \in \mathbb{R}^n$ *é um ponto interior a* D *se* $\exists_{R>0} : B_R(a) \subset D$.

ii) Diz-se que $a \in \mathbb{R}^n$ *é um ponto exterior a* D *se* $\exists_{R>0} : B_R(a) \subset D^c$.

iii) Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ *diz-se um ponto fronteiro de* D *se*

$$\forall_{R>0} : B_R(a) \cap D \neq \emptyset \wedge B_R(a) \cap D^c \neq \emptyset.$$

Ao conjunto de pontos interiores chama-se **interior** de D e será designado pelo símbolo $\mathrm{int}(D)$.

Ao conjunto de pontos exteriores chama-se **exterior** de D e será designado pelo símbolo $\mathrm{ext}(D)$.

Ao conjunto de pontos fronteiros chama-se **fronteira** de D e será designado pelos símbolos $\mathrm{front}(D)$ ou $\partial(D)$.

Exemplo 3.1 Consideremos o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ (ver figura(2)). Então,

- $\mathrm{int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
- $\mathrm{ext}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$
- $\partial(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

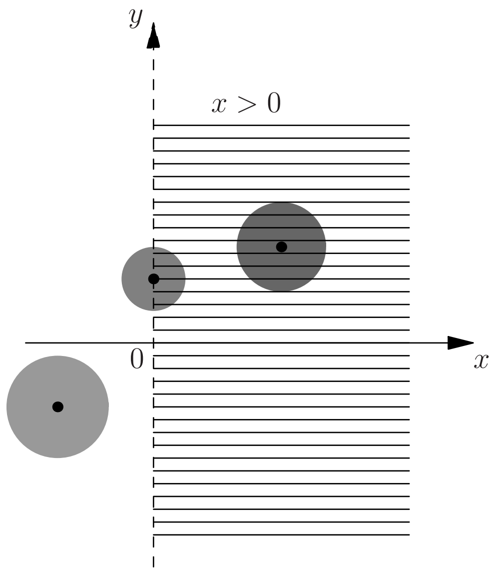

Figura 2: Interior, Exterior e Fronteira de $D \subset \mathbb{R}^2$

Definição 4 *a) Um connunto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se* ***aberto*** *se $D = int(D)$.*

b) Um connunto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se ***fechado*** *se $D = int(D) \cup \partial D$.*

c) Ao conjunto $\overline{D} = int(D) \cup \partial D$ chama-se ***fecho*** *ou* ***aderência*** *do conjunto D.*

Note-se que se um ponto pertence à fronteira de um conjunto D, por definição, também pertence à fronteira do complementar de D.

Note-se também que $\mathbb{R}^n = \text{int}(D) \cup \partial D \cup \text{ext}(D)$.

Portanto, é claro que um conjunto é aberto se e só se o respectivo complementar for fechado.

4 Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Uma sucessão (x_k) é uma função $\mathbb{N} \ni k \mapsto x_k \in \mathbb{R}^n$, que a cada $k \in \mathbb{N}$ faz corresponder um vector $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}) \in \mathbb{R}^n$.

Diz-se que uma sucessão (x_k) converge para um ponto a se dado $\delta > 0$ existe uma ordem k_0 a partir da qual os termos da sucessão se encontram na bola $B_\delta(a)$, ou seja

$$\forall_{\delta>0} \exists_{k_0}\; k > k_0 \Rightarrow \| x_k - a \| < \delta$$

Neste caso, escreve-se $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ ou $x_k \to a$.

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$(| x | + | y |)^2 =| x |^2 + | y |^2 +2 | x || y | \geq | x |^2 + | y |^2 \geq | x |^2$$

e, tomando a raiz quadrada nesta sequência de desigualdades, obtemos,

$$| x | + | y | \geq \sqrt{| x |^2 + | y |^2} \geq | x |,$$

ou seja,

$$| x | + | y | \geq \| (x, y) \| \geq | x | .$$

Do mesmo modo, obtemos

$$| x | + | y | \geq \| (x, y) \| \geq | y | .$$

É claro que para $x = (x_1, x_2, \cdots , x_n) \in \mathbb{R}^n$ teremos

$$| x_1 | + | x_2 | + \cdots + | x_n | \geq \| x \| \geq | x_j |, \ \forall j = 1, 2, \ldots , n. \tag{1}$$

Seja (x_k) uma sucessão convergente para $a = (a_1, a_2, \cdots , a_n)$. Usando a desigualdade (1), obtemos

$$| x_{k_1} - a_1 | + | x_{k_2} - a_2 | + \cdots + | x_{k_n} - a_n | \geq \| x_k - a \| \geq | x_{k_j} - a_j |, \ \forall j = 1, 2, \ldots , n.$$

Assim, concluímos que a sucessão (x_k) converge para a se e só se cada uma das sucessões, ditas componentes ou coordenadas, $(x_{k,j})$, converge par a_j, em que $j = 1, 2, \ldots , n$. Ou seja

$$x_k \to a \Leftrightarrow x_{k,j} \to a_j \,, \quad j = 1, 2, \ldots , n$$

Note-se que as sucessões componentes são sucessões de termos em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.1

1. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, 1 + e^{-k}\right) = (0, 1)$
2. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, 1 + e^{-k}, 3, \frac{2}{1 + k^2}\right) = (0, 1, 3, 0)$
3. A sucessão $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, 2^k\right)$ não é convergente porque a segunda componente não é uma sucessão convergente.

A aderência de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ pode ser caracterizada recorrendo a sucessões convergentes.

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \text{int}(D)$. Seja $B_{R_1}(a) \subset D$ de acordo com a definição de interior de D e seja $x_1 \in B_{R_1}(a)$. Tome-se $R_2 < \frac{R_1}{2}$. É claro que $B_{R_2}(a) \subset B_{R_1}(a)$. Seja $x_2 \in B_{R_2}(a)$.

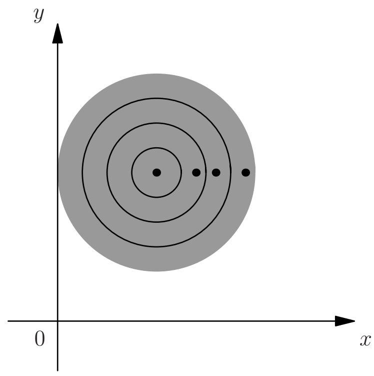

Figura 3: Construção de uma sucessão convergente

Tome-se $R_3 < \frac{R_2}{2}$. É claro que $B_{R_3}(a) \subset B_{R_2}(a)$. Seja $x_3 \in B_{R_3}(a)$. Deste modo, podemos construir uma sucessão (x_k) de termos em D, tal como se ilustra na figura (3).

Note-se que $\| x_k - a \| < \dfrac{R_1}{k}$, ou seja, $x_k \to a$.

Do mesmo modo se pode construir uma sucessão (x_k) de termos em D tal que $x_k \to a$ para o caso em que $a \in \partial D$.

Por outro lado, se (x_k) for uma sucessão convergente, de termos em D, o respectivo limite não poderá encontrar-se no exterior de D, ou seja, só poderá estar na aderência de D. Note-se que centrada num ponto exterior existe uma bola que não intersecta D.

Assim, $a \in \overline{D}$ se e só se for limite de uma sucessão de termos em D.

Portanto, um conjunto D será fechado se e só se os limites das suas sucessões convergentes estiverem em D.

5 Funções em $\mathbb{R}^n$

5.1 Exemplos

Em geral, as funções serão do tipo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em que D designa o respectivo domínio. Apresentam-se alguns exemplos ilustrativos dos vários tipos de funções importantes neste contexto.

i) Campo vectorial: $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{(x^2+y^2)}, \frac{x}{(x^2+y^2)} \right).$$

ii) Campo vectorial: $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

iii) Campo escalar: $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$\phi(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

iv) Campo escalar: $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

v) Trajectória ou caminho: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t).$$

vi) Parametrização de um parabolóide: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x,y) = (x, y, x^2+y^2).$$

Para uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ usaremos a notação seguinte:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$$

em que cada função componente $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função escalar,

$$f_j(x) = f_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,,\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

5.2 Funções Contínuas e Sucessões

A noção de função contínua desempenha um papel crucial nas aplicações. Muitas grandezas físicas são traduzidas matematicamente em termos de funções contínuas.

Definição 5 *Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in D$ se*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D,\ \| x - a \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \epsilon$$

em que $\| x - a \|$ é calculada em $\mathbb{R}^n$ e $\| f(x) - f(a) \|$ é calculada em $\mathbb{R}^m$.

Por outras palavras, dada uma bola de $\mathbb{R}^m$, de raio ϵ centrada em $f(a)$, ou seja, $B_\epsilon(f(a))$, existe uma bola, de $\mathbb{R}^n$, de raio δ centrada em a, $B_\delta(a)$ tal que se $x \in B_\delta(a) \cap D$ então $f(x) \in B_\epsilon(f(a))$. (ver figura (4))

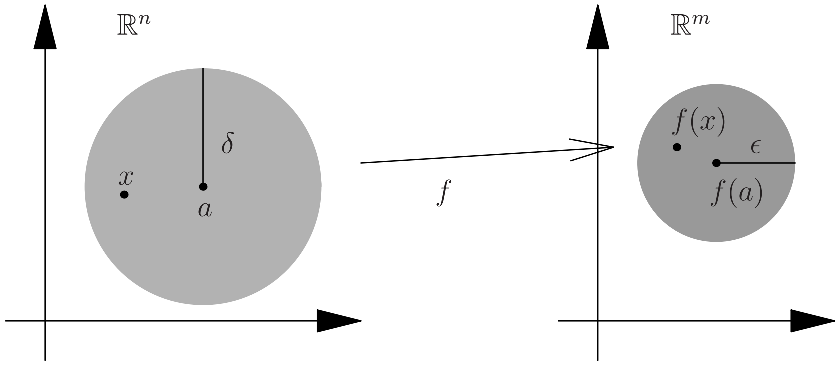

Figura 4: Definição de função contínua

Seja (x_k) uma sucessão em D tal que $x_k \to a$. Então existe um inteiro positivo k_0 tal que $\| x_k - a \| < \delta$ para todo $k > k_0$. Sendo f contínua em a, teremos $\| f(x_k) - f(a) \| < \epsilon$, ou seja, $f(x_k) \to f(a)$.

Por outro lado, se f não fosse contínua em a existiria um $\epsilon > 0$ tal que, para qualquer $\delta > 0$ haveria um ponto $x \in D$ verificando

$$\| x - a \| < \delta \text{ e } \| f(x) - f(a) \| \geq \epsilon$$

Tomando sucessivamente $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, teríamos uma sucessão (x_k) tal que

$$\| x_k - a \| < \frac{1}{k} \text{ e } \| f(x_k) - f(a) \| \geq \epsilon,$$

ou seja, $x_k \to a$ mas a sucessão $(f(x_k))$ não seria convergente para $f(a)$.

Assim, podemos concluir que **uma função** $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **é contínua em** $a \in D$ **se e só se dada uma sucessão** (x_k) **tal que** $x_k \to a$, **então** $f(x_k) \to f(a)$.

Note-se que, tendo em conta a desigualdade (1), facilmente se conclui que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in D$ se e só se cada uma das funções componentes $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall j = 1, 2, \ldots, m$, for contínua em $a \in D$.

Portanto, em termos de continuidade, basta estudar as funções escalares.

5.3 Continuidade e Limite

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $a \in \overline{D} = \text{int}(D) \cup \partial(D)$.

Diz-se que $f(x)$ tende para b se e só se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que sempre que $x \in D$ e $\| x - a \| < \delta$ se tenha $\| f(x) - b \| < \epsilon$.

Neste caso escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Portanto, a função f é contínua no ponto a se e só se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Assim, tendo em conta a noção de limite, facilmente se verificam as propriedades seguintes das funções contínuas.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

a) A função αf é contínua.

b) A função $f + g$ é contínua.

c) A função fg é contínua.

d) A função f/g, sendo $g \neq 0$, é contínua.

e) Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua em $a \in A$ e $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ uma função tal que $f(A) \subset B$, contínua em $f(a)$. Então, a **função composta** $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é contínua em a.

Exemplo 5.1 A função definida por $f(x, y) = x$ é contínua em $\mathbb{R}^2$. De facto,

$$| f(x, y) - f(a, b) |=| x - a | \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} =\| (x - a, y - b) \|$$

e, portanto, dado $\epsilon > 0$, com $\delta = \epsilon$ temos

$$\| (x - a, y - b) \|< \delta \Rightarrow| f(x, y) - f(a, b) |< \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b) = a.$$

Do mesmo modo se vê que a função $f(x, y) = y$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.
Em geral, a função $f(x) = k_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.2 Seja $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

i) Pelas propriedades das funções contínuas f é contínua no seu domínio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

ii) A fronteira de D é o conjunto $\{(0, 0)\}$. Vamos ver que f pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto, para $y = mx$, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{\sqrt{1+m^2}} = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Assim, existe um candidato a limite. Usando a desigualdade (1), temos

$$| f(x, y) |=| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} | \leq \frac{| x || y |}{\|(x, y)\|} \leq \frac{\|(x, y)\|^2}{\|(x, y)\|} = \|(x, y)\|.$$

Portanto,

$$| f(x, y) | \leq \|(x, y)\|,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

Exemplo 5.3 Seja $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

i) Pelas propriedades das funções contínuas f é contínua no seu domínio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

ii) A fronteira de D é o conjunto $\{(0,0)\}$. Vamos ver que f não pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto,

$$\begin{aligned} f(x,x) &= \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \\ f(x,-x) &= -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

e, portanto, para $y = x$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$$

e para $y = -x$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,-x) = -\frac{1}{2},$$

ou seja, a função f não pode ser prolongada por continuidade à origem.

Exemplo 5.4 Seja $g(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

i) Pelas propriedades das funções contínuas g é contínua no seu domínio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

ii) A fronteira de D é o conjunto $\{(0,0)\}$. Vamos ver que g pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto, para $y = mx$, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{x\to 0} g(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1+m^2} = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ desde que este limite seja calculado segundo qualquer linha recta que passa pela origem. Este facto não garante que o limite exista mas, se existir, deverá ser este mesmo.

Vamos ver, recorrendo à definição, que de facto temos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

Usando a desigualdade (1), ou seja, $x^2 \leq x^2 + y^2$; $\mid y \mid \leq \sqrt{x^2+y^2}$, temos

$$\mid g(x,y) \mid = \mid \frac{x^2y}{x^2+y^2} \mid \leq \frac{x^2 \mid y \mid}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = \| (x,y) \| .$$

Portanto,

$$| \, g(x,y) \, | \leq \| \, (x,y) \, \|,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$$

Exemplo 5.5 Seja $h(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

i) Pelas propriedades das funções contínuas h é contínua no seu domínio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Note-se que h é a composição de funções contínuas

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 & \mapsto & \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \end{array}$$

ii) Dado que $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen} r}{r} = 1$, teremos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 1$.

Exemplo 5.6 Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$.

i) Pelas propriedades das funções contínuas h é contínua no seu domínio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

ii) Para $y = mx$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^4+m^2} = 0, \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $x = 0$ temos $f(0,y) = 0$ e, portanto, segundo todas as linhas rectas que passam pela origem o limite é sempre o mesmo e poderíamos pensar que o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe.

No entanto, fazendo $y = x^3$ obtemos

$$f(x,x^3) = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, o limite não existe.

Exemplo 5.7 Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^4}$.

i) Pelas propriedades das funções contínuas h é contínua no seu domínio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

ii) A fronteira de D é o conjunto $\{(0,0)\}$. Vamos ver que f pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto, para $y = mx$, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^2 + mx^4} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{1 + mx^2} = 0, \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

É claro que $f(0,y) = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ desde que este limite seja calculado segundo qualquer linha recta que passa pela origem. Este facto não garante que o limite exista mas, se existir, deverá ser este mesmo.

Vamos ver, recorrendo à definição, que de facto temos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Usando a desigualdade (1) e tendo em conta que $x^2 + y^4 \geq x^2$, temos

$$\mid f(x,y) \mid = \mid \frac{x^3 y}{x^2 + y^4} \mid \leq \frac{\mid x \mid^3 \mid y \mid}{\mid x \mid^2} = \mid x \mid\mid y \mid \leq \| (x,y) \|^2 .$$

Portanto,

$$\mid f(x,y) \mid \leq \| (x,y) \|^2,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

5.4 Conjuntos Fechados. Exemplos

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo, $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideremos o conjunto

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \ \geq \ \alpha\}.$$

Seja (x_k) uma sucessão de termos em A_α e convergente para um ponto a. Dado que f é uma função contínua, teremos

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$$

e, sendo $f(x_k) \geq \alpha$, necessariamente $f(a) \geq \alpha$, ou seja $a \in A_\alpha$.

Portanto, o conjunto A_α é fechado.

Do mesmo modo se mostra que os conjuntos da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \ \leq \ \alpha\}$$

são também fechados.

Aos conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \alpha\}$ dá-se o nome de conjuntos de nível α da função escalar f.

Assim, **os conjuntos de nível de uma função escalar contínua são fechados**.

Sabendo que o complementar de um aberto é um fechado, concluímos que os conjuntos da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}$$

ou da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\}$$

são abertos.

O gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^{n+1}$.

De facto, o gráfico da função f é o conjunto

$$G(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\},$$

e definindo a função $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, fica claro que $G(f)$ é o conjunto de nível zero da função contínua $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e, portanto, é um conjunto fechado.

***

Exemplo 5.8 Um Círculo em $\mathbb{R}^2$.

Consideremos o conjunto definido por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

ou seja, o círculo de raio um e centro na origem de $\mathbb{R}^2$, representado na figura 5.

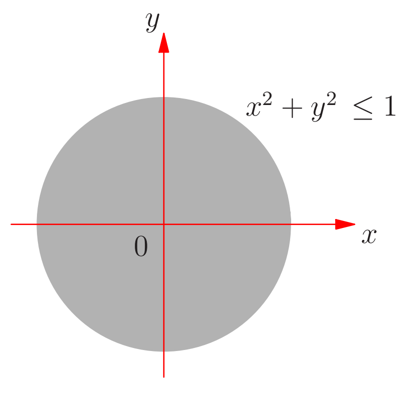

Figura 5: Círculo definido por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Dado que a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, concluímos que C é um conjunto fechado.

Exemplo 5.9 Uma Esfera em $\mathbb{R}^3$.

Consideremos a superfície esférica de raio um e centro na origem de $\mathbb{R}^3$, representada na figura 6, e definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

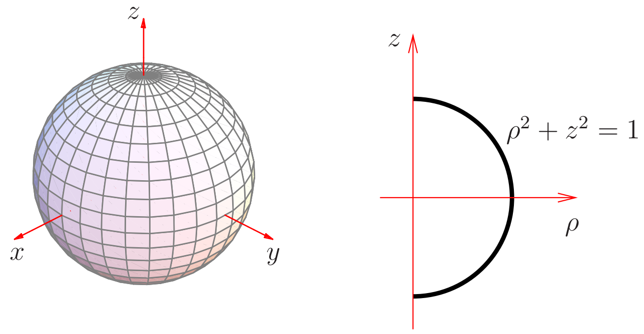

Figura 6: Esfera definida por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

A superfície S pode ser vista de várias formas.

i) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$, ou seja, é o conjunto de nível zero da função contínua $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

ii) Dado que $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - z^2$, então para cada valor de z temos uma circunferência de raio $\sqrt{1 - z^2}$ e centro em $(0, 0, z)$, em que $0 \leq z \leq 1$. Trata-se, portanto, de uma colecção ou"pilha" de circunferências.

iii) Pode ser vista como o resultado de uma rotação, em torno do eixo Oz, de uma semi-circunferência tal como se ilustra na figura (6).

De facto, definindo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos $\rho^2 + z^2 = 1$.

Note-se que ρ representa a distância de um ponto de coordenadas (x, y, z) ao eixo Oz, ou seja, ao ponto de coordenadas $(0, 0, z)$. Portanto, fazendo rodar a semi-circunferência em torno do eixo Oz obtemos a esfera.

Exemplo 5.10 Um Cilindro em $\mathbb{R}^3$.

A superfície cilíndrica de raio um e altura dois em $\mathbb{R}^3$, representada na figura 7, e definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\ ;\ -1 < z < 1\},$$

pode ser vista de várias maneiras.

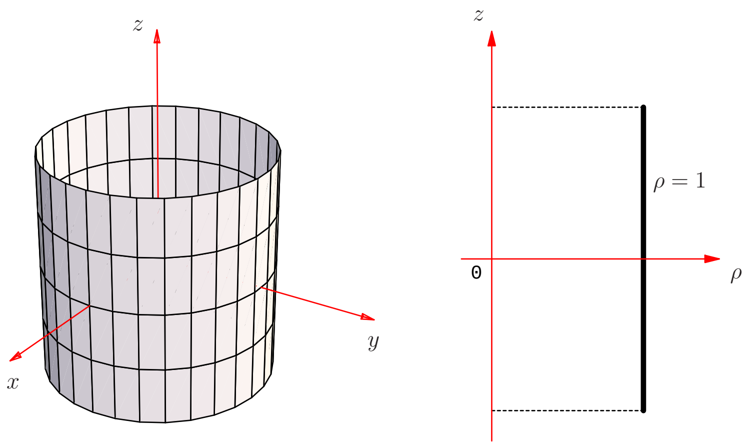

Figura 7: Cilindro definido por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, -1 < z < 1\}$

i) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\ ;\ -1 < z < 1\}$, ou seja, é o conjunto de nível um da função contínua $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = x^2 + y^2$. Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

ii) É uma colecção ou "pilha" de circunferências de raio um e centro em $(0, 0, z)$ em que $-1 < z < 1$.

iii) Pode ser visto como o resultado de uma rotação, em torno do eixo Oz, de um segmento de recta vertical tal como se ilustra na figura (7).

    De facto, definindo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos $\rho = 1$.

Exemplo 5.11 Um Hiperbolóide em $\mathbb{R}^3$.

O hiperbolóide representado na figura 8, e definido por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\ ;\ -1 < z < 1\},$$

pode ser visto de várias maneiras.

i) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\ ;\ -1 < z < 1\}$, ou seja, é o conjunto de nível um da função contínua $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

ii) É uma colecção ou "pilha" de circunferências de raio $\sqrt{1 + z^2}$ e centro em $(0, 0, z)$ em que $-1 < z < 1$.

iii) Pode ser visto como o resultado de uma rotação, em torno do eixo Oz, de um ramo de hipérbole tal como se ilustra na figura (8).

    De facto, definindo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos $\rho^2 - z^2 = 1$.

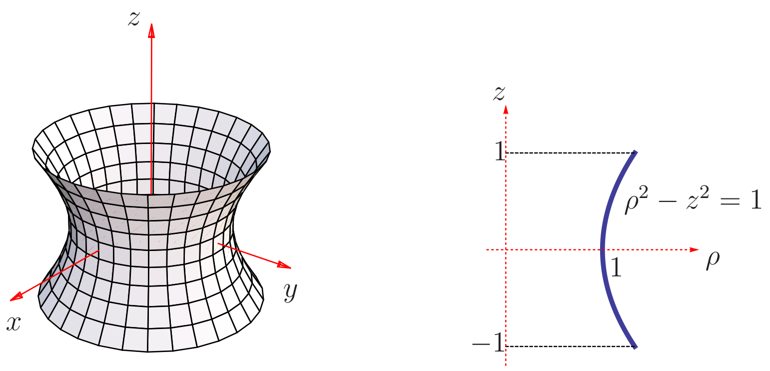

Figura 8: Hiperbolóide definido por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2 \,;\, -1 < z < 1\}$

Exemplo 5.12 Um Parabolóide em $\mathbb{R}^3$.

Seja S a superfície representada na figura 9 e definida por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}.$$

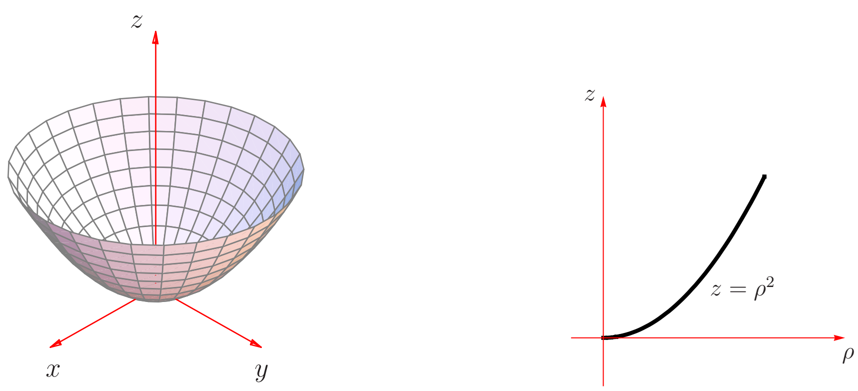

Figura 9: Parabolóide definido por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$

i) $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$, é o gráfico da função contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

ii) É uma "pilha" de circunferências de raio $\sqrt{z}$ e centro em $(0, 0, z)$.

iii) É o resultado de uma rotação, em torno do eixo Oz, de uma parábola tal como se ilustra na figura 9.

De facto, definindo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos $z = \rho^2$.

Exemplo 5.13 Um Cone em $\mathbb{R}^3$.

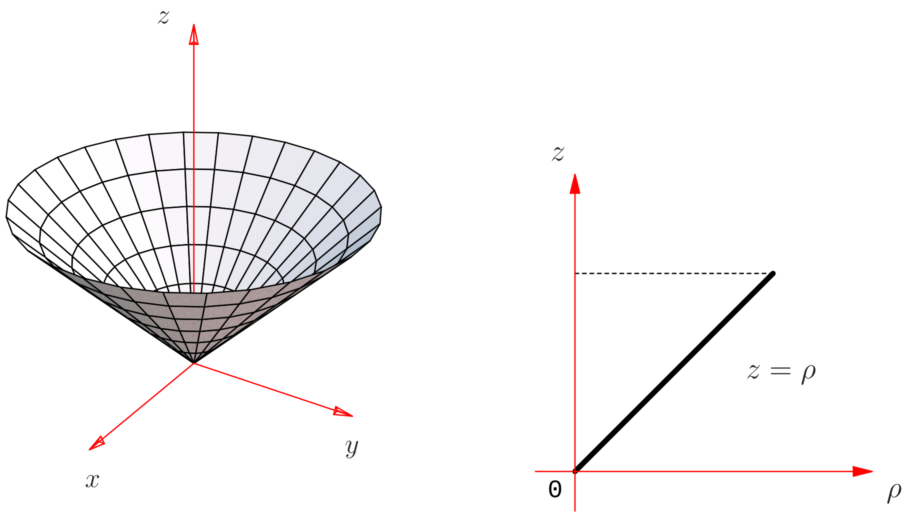

Figura 10: Cone definido por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$

i) O cone $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, é gráfico da função contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

ii) É uma "pilha" de circunferências de raio z e centro em $(0, 0, z)$.

iii) Pode ser visto como o resultado de uma rotação, em torno do eixo Oz, de uma recta tal como se ilustra na figura (10).
De facto, definindo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos $z = \rho$.

Exemplo 5.14 Um Toro em $\mathbb{R}^3$.

i) O toro $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\}$, é o conjunto de nível zero da função contínua $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 - 1$. Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

ii) Pode ser visto como o resultado de uma rotação, em torno do eixo Oz, de uma circunferência tal como se ilustra na figura (11).
De facto, definindo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos $(\rho - 3)^2 + z^2 = 1$.

***

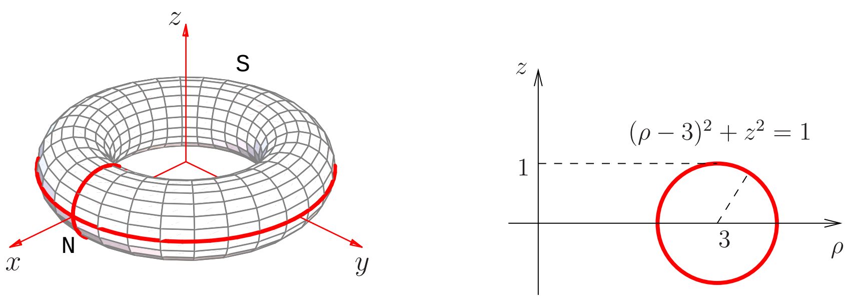

Figura 11: Toro definido por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-3)^2+z^2=1\}$

5.5 Conjuntos Compactos. Teorema de Weierstrass

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existir uma bola centrada na origem que o contenha, ou seja,

$$\exists R > 0 : A \subset B_R(0) \Leftrightarrow \exists R > 0\, \forall x \in A : \| x \| < R$$

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **compacto** se for limitado e fechado.

Exemplo 5.15 i) É claro que uma bola em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado.

ii) A superfície cilíndrica (7) é um conjunto limitado porque, sendo

$$x^2+y^2=1\,;\ -1<z<1,$$

teremos

$$x^2+y^2+z^2 \le 2,$$

ou seja, está contida na bola de raio $\sqrt{2}$ e centro na origem.

iii) O toro (11) é um conjunto limitado. De facto, sendo

$$(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2+z^2=1,$$

é claro que

$$2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 4\,;\ z^2 \le 1,$$

e, portanto,

$$x^2+y^2+z^2 < 17.$$

iv) O parabolóide (9) e o cone (10) não são conjuntos limitados.

É sabido que em $\mathbb{R}$ uma sucessão limitada tem pelo menos uma subsucessão convergente. Em $\mathbb{R}^n$ acontece o mesmo.

Para vermos que assim é, consideremos apenas o caso de $\mathbb{R}^2$. Seja (x_k, y_k) uma sucessão limitada, ou seja,

$$\exists R > 0 \, \forall k \ \parallel (x_k, y_k) \parallel \leq R$$

e, sabendo que

$$\mid x_k \mid \leq \parallel (x_k, y_k) \parallel,$$

a sucessão (x_k) é limitada em $\mathbb{R}$ e, portanto, tem uma subsucessão convergente. Seja $(x_{k'})$ essa subsucessão.

A sucessão $(x_{k'}, y_{k'})$ é uma subsucessão de (x_k, y_k) e note-se que $(y_{k'})$ é também limitada em $\mathbb{R}$ e tem, portanto, pelo menos uma subsucessão $(y_{k''})$ convergente.

Assim, a sucessão $(x_{k''}, y_{k''})$ é uma subsucessão convergente da sucessão (x_k, y_k).

Recorde-se que uma sucessão convergente, com termos num conjunto fechado, tem limite nesse conjunto.

Portanto, um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é compacto se qualquer sucessão com termos em A tem pelo menos uma subsucessão convergente com limite em A.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e consideremos o respectivo conjunto imagem $f(D)$.

Seja (y_k) uma sucessão em $f(D)$ e consideremos a sucessão (x_k) de termos em D tal que $y_k = f(x_k)$.

Sendo D um conjunto compacto, a sucessão (x_k) tem uma subsucessão $(x_{k'})$ convergente com limite $a \in D$ e, dado que f é uma função contínua, teremos

$$\lim_{x_{k'} \to a} f(x_{k'}) = f(a)$$

e, portanto,

$$\lim_{k' \to \infty} y_{k'} = f(a) \in f(D),$$

ou seja, a sucessão (y_k) tem uma subsucessão $(y_{k'})$ convergente com limite em $f(D)$.

No caso escalar, $f(D)$ será um conjunto compacto em $\mathbb{R}$ e, portanto, terá máximo e mínimo.

Teorema 5.1 *(Weierstrass) Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e não vazio. Então qualquer função escalar **contínua** em D tem **máximo** e **mínimo** nesse conjunto.*

***

Por ser útil, daremos outra caracterização dos conjuntos compactos.

Diz-se que uma colecção de conjuntos abertos (A_α) constitui uma **cobertura** de D se

$$D \subset \bigcup_\alpha A_\alpha.$$

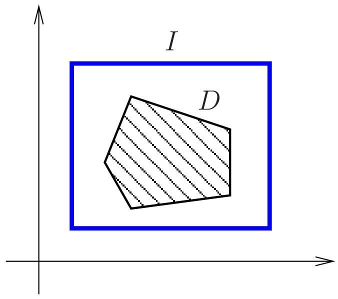

Figura 12

Teorema 5.2 *Seja* (A_α) *uma cobertura de um compacto* D. *Então existe um número finito de conjuntos* $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_N}$, *dessa cobertura, tais que*

$$D \subset \bigcup_{k=1}^{N} A_{\alpha_k}.$$

Diz-se que um conjunto $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo aberto se for o produto cartesiano de n intervalos abertos de $\mathbb{R}$, ou seja, se tivermos

$$I =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots \times]a_n, b_n[.$$

Em $\mathbb{R}^2$ um intervalo é um rectângulo cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados. Em $\mathbb{R}^3$ é um paralelipípedo com arestas paralelas aos eixos coordenados.

Seja D um conjunto compacto. Então deverá existir um intervalo limitado I tal que $D \subset I$, como se ilustra na figura 12. Suponhamos que D não verifica a propriedade enunciada no teorema. Então, por bissecção das arestas de I, para algum dos resultantes sub-intervalos, designado por I_1, o conjunto $I_1 \cap D$ não verifica aquela propriedade. Seja $x_1 \in I_1 \cap D$ um ponto qualquer.

Repetindo este processo, teremos uma sucessão de conjuntos $(I_k \cap D)$ que não verificam a propriedade e uma sucessão de pontos (x_k), tais que $x_k \in I_k \cap D$ e $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots$.

Sendo D limitado e fechado, existe uma subsucessão de (x_k), também designada por (x_k), que é convergente e cujo limite, designado por x, pertence a D.

Assim, existe algum A_α tal que $x \in A_\alpha$ e, sendo A_α aberto, existe uma bola $B_\epsilon(x) \subset A_\alpha$.

Dado que $x_k \to x$, seja k_0 tal que, para $k > k_0$, se tenha $x_k \in B_\epsilon(x)$.

Por construção dos intervalos I_k, então existe um conjunto A_α tal que

$$x_k \in I_k \cap D \subset B_\epsilon(x) \subset A_\alpha,$$

o que contradiz o facto de que $I_k \cap D$ não verifica a propriedade. Portanto, D verifica aquela propriedade.

***

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus II.* Editorial Reverté, SA, 1977.

[2] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise em R^n.* AEIST, 1978.

[3] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus.* W. H. Freeman and Company, 1998.